REXE 24(54) (2025), 315-337

Revista de Estudios y Experiencias en Educación

REXE

journal homepage: http://revistas.ucsc.cl/index.php/rexe

Integração do software GeoGebra na resolução de problemas da olímpicos: uma abordagem baseada na Teoria das Situações Didáticas

Renata Teófilo de Sousa[a], Paulo Vítor da Silva Santiago[b], Francisco Régis Vieira Alves[a] e Maria José Costa dos Santos[b]

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará[a]. Universidade Federal do Ceará[b], Brasil

Recibido: 14 de junio 2024 - Revisado: 31 de agosto 2024 - Aceptado: 04 de noviembre 2024

RESUMO

A presença da Matemática na educação dos estudantes é fundamental, contribuindo para sua formação intelectual e profissional e proporcionando o desenvolvimento do raciocínio, essencial para lidar com desafios diários. No entanto, o domínio dessa disciplina requer um nível de raciocínio que muitos alunos não conseguem alcançar devido a vários fatores, evidenciado pelos resultados de avaliações externas, como o Programme for International Student Assessment (PISA). Esta pesquisa investiga a influência do uso do GeoGebra em uma situação didática olímpica, envolvendo um problema geométrico da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas e Privadas (OBMEP) 2023, aplicando a Teoria das Situações Didáticas. Com base em relatórios do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), constata-se que a formação dos professores de Matemática apresenta lacunas significativas, impactando diretamente a qualidade do ensino. Utilizamos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, em suas quatro fases, em que desenvolvemos uma sessão de ensino que integra o GeoGebra para promover a visualização geométrica no contexto da resolução de questões olímpicas, facilitando compreensão da geometria. Os resultados indicaram avanços significativos na compreensão dos con-

*Correspondencia: Renata Teófilo de Sousa (R. T. Sousa).

https://orcid.org/0000-0001-5507-2691 (rtsnaty@gmail.com).

http://orcid.org/0000-0003-3710-1561 (fregis@ifce.edu.br).

https://orcid.org/0000-0002-6608-5452 (paulovitor.paulocds@gmail.com).

https://orcid.org/0000-0001-9623-5549 (mazeautomatic@gmail.com).

https://doi.org/10.21703/rexe.v24i54.2789 *ISSN en línea 0718-5162*

ceitos geométricos, apesar de alguns obstáculos didáticos identificados. Além disso, considera-se a importância de visualizar e manipular figuras geométricas para resolver problemas complexos, mostrando como o uso do GeoGebra pode ser uma ferramenta com potencial para desenvolver o pensamento geométrico. Propõem-se melhorias como a introdução gradual de ferramentas tecnológicas e o desenvolvimento de atividades que conectem representações visuais e conceitos abstratos.

Palavras-chave: Visualização geométrica; GeoGebra; olimpíadas de matemática; teoria das situações didáticas; engenharia didática.

Integración del software GeoGebra en la solución de problemas olímpicos: una aproximación basada en la Teoría de Situaciones Didácticas

RESUMEN

La presencia de las Matemáticas en la educación de los estudiantes es fundamental, ya que contribuye a su formación intelectual y profesional, además de proporcionar el desarrollo del razonamiento, esencial para enfrentar los desafíos diarios. Sin embargo, el dominio de esta disciplina requiere un nivel de razonamiento que muchos estudiantes no logran alcanzar debido a diversos factores, lo que se evidencia en los resultados de evaluaciones externas, como el Programme for International Student Assessment (PISA). Esta investigación analiza la influencia del uso de GeoGebra en una situación didáctica olímpica, basada en un problema geométrico de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de Escuelas Públicas y Privadas (OBMEP) 2023, aplicando la Teoría de las Situaciones Didácticas. Basándose en informes del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), se observa que la formación de los profesores de Matemáticas presenta lagunas significativas, impactando directamente en la calidad de la enseñanza. Se empleó la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación en sus cuatro fases, desarrollando una sesión de enseñanza que integra GeoGebra para fomentar la visualización geométrica en el contexto de la resolución de problemas olímpicos, facilitando la comprensión de la geometría. Los resultados indicaron avances significativos en la comprensión de los conceptos geométricos, a pesar de algunos obstáculos didácticos identificados. Además, se destaca la importancia de visualizar y manipular figuras geométricas para resolver problemas complejos, demostrando cómo el uso de GeoGebra puede ser una herramienta con potencial para desarrollar el pensamiento geométrico. Se proponen mejoras como la introducción gradual de herramientas tecnológicas y el desarrollo de actividades que conecten representaciones visuales con conceptos abstractos.

Palabras chave: Visualización geométrica; GeoGebra; olimpiadas de matemáticas; teoría de las situaciones didácticas; ingeniería didáctica.

Integrating GeoGebra software in the resolution of Olympiad problems: an approach based on the Theory of Didactical Situations

ABSTRACT

The presence of mathematics in student education is essential, contributing to their intellectual and professional development and fostering reasoning skills crucial for tackling daily challenges. However, mastering this subject requires a level of reasoning that many students struggle to attain due to various factors, as evidenced by results from external assessments such as the Program for International Student Assessment (PISA). Using the Theory of Didactical Situations, this study looks into what happens when you use GeoGebra in a math Olympiad-based teaching situation involving a geometric problem from the 2023 Brazilian Math Olympiad for Public and Private Schools (OBMEP). Based on reports from the Institute for Pure and Applied Mathematics (IMPA), it is found that the mathematical education of teachers reveals significant gaps, directly impacting teaching quality. We used the four stages of Didactical Engineering as a research method to create a teaching session that uses GeoGebra to help students see shapes more clearly while solving Olympiad problems. This made it easier for them to understand geometry. The results indicated substantial progress in understanding geometric concepts, despite some identified didactical obstacles. Moreover, we highlight the importance of visualizing and manipulating geometric figures to solve complex problems, illustrating how GeoGebra can be a powerful tool for developing geometric thinking. Improvements that are being considered include slowly adding technological tools and creating activities that link pictures and ideas that aren't concrete.

Keywords: Geometric visualization; GeoGebra; mathematics olympiads; theory of didactic situations; didactic engineering.

1. Introdução

A presença da Matemática na educação dos estudantes é fundamental, contribuindo para sua formação tanto intelectual quanto profissional e proporcionando o desenvolvimento do raciocínio, essencial para lidar com desafios do dia a dia (Souza et al., 2020). No entanto, o domínio dessa disciplina requer um nível de raciocínio que muitos alunos não conseguem alcançar devido a vários fatores. Essa dificuldade tem sido evidenciada pelos resultados de avaliações externas, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (*PISA For Schools*), reconhecido como uma das avaliações mais importantes globalmente (Brasil, 2019; Silva et al., 2021).

Com base em relatórios oficiais de órgãos como o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA, 2019), constata-se que a formação dos professores de Matemática em nível nacional apresenta lacunas significativas, refletindo diretamente na qualidade do ensino dessa disciplina no país. Alves (2020b, p. 121) frisa que "em várias ocasiões, o professor de Matemática desenvolve sua práxis desprovida de um fundamento teórico para sua transposição didática e a inexistência de uma metodologia de ensino sistemática, declarada e dedicada ao tipo de abordagem característica das Olimpíadas". Essa fragilidade na preparação dos docentes se reflete na abordagem de questões de nível olímpico em sala de aula, uma vez que muitos professores enfrentam dificuldades em lidar com esse tipo de conteúdo, seja devido a lacunas na própria formação ou a questões culturais arraigadas.

Há uma percepção generalizada de que as questões olímpicas são excessivamente complexas, o que pode desencorajar seu uso em contextos educacionais regulares. Essa visão limitada pode ser um obstáculo para a implementação eficaz desses conteúdos e para a promoção de uma educação matemática mais desafiadora e enriquecedora para todos os estudantes (Alves, 2020; 2021; Bragança, 2013).

Autores clássicos como Coxeter (1969), Senechal (1990), Guzmán (2002), Duval (2005), além de diversos educadores e pesquisadores no campo da Matemática e Educação Matemática, abordam a importância do pensamento geométrico visual em questões de Geometria. Neste trabalho, voltamos nosso olhar para o pensamento geométrico e a visualização em questões oriundas de competições de matemática, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP).

A capacidade de visualização espacial é essencial para compreender e resolver problemas geométricos complexos, bem como para desenvolver habilidades de raciocínio abstrato e formulação de conjecturas (Almouloud, 2017; Costa, 2020; Duval, 2005). Dito isto, buscamos estruturar estratégias e abordagens pedagógicas para promover o pensamento geométrico visual na abordagem de problemas olímpicos.

Assim, partimos da seguinte pergunta de pesquisa: *Qual é a influência da abordagem baseada na Teoria das Situações Didáticas, utilizando o software GeoGebra, na facilitação da transição dos conceitos de Geometria Plana para Espacial, especialmente em termos de visualização, no contexto educacional das Olimpíadas de Matemática?* Dito isto, o objetivo desta pesquisa foi investigar a influência de uma abordagem didática que utiliza o GeoGebra, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, na facilitação do entendimento de conceitos geométricos pelos estudantes, promovendo a transição entre a Geometria Plana e a Espacial em problemas de competições olímpicas.

Este trabalho foi originado a partir de uma observação empírica ao longo do ano de 2023, com um grupo de 24 alunos participantes de um curso preparatório para olimpíadas, em uma escola da rede pública estadual de ensino profissionalizante, na cidade de Sobral/CE, zona norte do estado.

Com o intuito de promover a autonomia do estudante e torná-lo protagonista de sua própria jornada de aprendizagem, desenvolveu-se uma abordagem pedagógica fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2008), com base na concepção apresentada por Alves (2020a; 2020b) sobre as Situações Didáticas Olímpicas (SDO).

A TSD preconiza a criação de um ambiente propício pelo professor, no qual os alunos são desafiados a investigar e apropriar-se do conhecimento sob condições específicas. Nesse contexto, as SDO adaptam a abordagem da TSD para lidar com problemas característicos das olimpíadas matemáticas, conhecidos como Problemas Olímpicos (PO) (Alves, 2020a; 2020b) e, em especial, escolhemos um problema da prova da OBMEP 2023, segunda fase (OBMEP, 2023). O foco desta questão recai sobre a visualização geométrica, no sentido da transição da geometria plana para a espacial.

Para explorar o potencial matemático dos estudantes, sua capacidade de demonstrar, provar e argumentar, o software GeoGebra foi introduzido como uma ferramenta para modelar visualmente a SDO. Com sua interface dinâmica entre Álgebra e Geometria, o GeoGebra possibilita a criação, manipulação e visualização em 2D e 3D, promovendo maior engajamento dos estudantes com a matemática e, consequentemente, aprimorando o aprendizado da disciplina e o interesse em participar de olimpíadas (Alves, 2019; Sousa et al., 2022; Sousa e Alves, 2024) .

A metodologia deste estudo foi a Engenharia Didática (ED), proposta por Artigue (2020a; 2020b), que visa criar um ambiente educacional propício para que os alunos construam o conhecimento de forma autônoma, envolvendo a criação de sequências de atividades pedagógicas, a observação e análise das interações entre alunos e professores, bem como a reflexão sobre as estratégias utilizadas para promover o aprendizado. Nesse sentido, a ED tem por objetivo identificar obstáculos e dificuldades dos alunos e desenvolver abordagens pedagógicas mais eficazes (Almouloud, 2007).

Executamos as quatro fases da ED aliadas à TSD, pela familiaridade e gênese francófona de ambas, no intuito de promover um ambiente propício ao estudo do tema. Partindo da TSD, desenvolvemos um modelo didático (Brousseau, 2008) baseado na abordagem proposta por Alves (2020a; 2020b) sobre Situações Didáticas Olímpicas (SDO), buscando facilitar a transição dos conceitos de geometria plana para espacial, com foco na visualização e apoio do GeoGebra, no contexto educacional das Olimpíadas de Matemática.

Dito isto, nas seções seguintes apresentamos cada uma das fases da Engenharia Didática desenvolvida.

2. Análises preliminares

Nesta fase, procede-se a uma revisão bibliográfica que aborda temas específicos relacionados ao ensino durante o contexto das Olimpíadas de Matemática, com foco na Geometria Plana. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), as análises preliminares em uma ED fundamentam-se na epistemologia dos conteúdos abordados, analisando o impacto do ensino tradicional e suas repercussões, as concepções dos alunos e as dificuldades que afetam seu progresso, bem como as condições e fatores que influenciam na eficácia do processo de ensino.

Em geral, as questões provenientes de provas de olimpíadas exigem dos estudantes atenção, criatividade, capacidade estratégica e um conhecimento mais aprofundado sobre os tópicos abordados. Portanto, é fundamental que possuam habilidades de interpretação e compreensão de problemas, além de concentração e habilidade matemática. Este tipo de problema é denominado por Problema Olímpico (PO), sendo caracterizado pelo autor como:

> [...] um conjunto de situações-problema de Matemática, abordados em um contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores, cuja abordagem e características de ação individual e solitária destes envolve apenas objetivo/escopo de se atingir as metas (medalhas e certificados) definidas *a priori* em cada competição por intermédio do emprego de estratégias especializadas, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, instrumentalizados previamente por professores de Matemática (Alves, 2021, p. 125).

Partindo do conceito de PO e das dialéticas da TSD, Alves (2020a; 2020b; 2021) concebe o termo *Situação Didática Olímpica* (SDO), definido pelo autor como situações de ensino estruturadas para a resolução de problemas olímpicos, seguindo as fases dialéticas de Brousseau (2008), presentes na TSD.

Considerando os objetivos da pesquisa com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2008), investigamos a transposição do conhecimento, levando em consideração o contexto preparatório para olimpíadas, de forma articulada ao uso de tecnologias. No âmbito das Olimpíadas de Matemática, a Situação Didática Olímpica (SDO) (Alves, 2020a) examina diversos aspectos que podem contribuir para os desafios enfrentados na integração dos Problemas Olímpicos (PO) na sala de aula, visando a abordagem deste tipo de questão no desenvolvimento autônomo do aluno. Algumas dificuldades podem surgir devido à ausência de abordagem desse tipo de problema nos materiais didáticos adotados.

O GeoGebra tem se destacado como uma ferramenta fundamental no trabalho relacionado às olimpíadas de matemática (Santiago, 2021). Ao oferecer uma plataforma interativa e dinâmica, o software permite que os estudantes explorem conceitos matemáticos de forma visual e interativa. Isso não só fortalece sua compreensão dos princípios fundamentais da Geometria, mas também os capacita a abordar desafios mais complexos com confiança e criatividade relacionados a outros conteúdos. Assim, tem-se que explica que:

> A Geometria Espacial muitas vezes é ensinada utilizando-se apenas o livro e o quadro como recursos didáticos. Ao contrário da Geometria Plana, como o próprio nome sugere, na Geometria Espacial os objetos estão no espaço tridimensional. Sendo assim, destacamos a importância da inserção de tecnologias que permitam o estudo dos elementos no espaço tridimensional considerando todas as dimensões, de modo que facilite a visualização desses elementos pelo aluno (Silva, 2016, p. 13).

Além disso, o GeoGebra proporciona uma ponte entre a geometria plana e espacial, expandindo o escopo dos problemas que os competidores podem manipular simulações de cada objeto matemático (Alves, 2019). Com sua capacidade de manipulação e recursos tridimensionais, os estudantes podem explorar conceitos geométricos de forma mais abrangente e prática (Sousa et al., 2022). A integração dinâmica entre teoria e prática fortalece a preparação dos competidores, além de enriquecer sua experiência de aprendizado, preparando-os para lidar com problemas multidimensionais nas olimpíadas de matemática.

Na análise preliminar de acordo com a ED, é crucial considerar os conhecimentos prévios dos alunos antes de utilizar o GeoGebra, a fim de compreender suas habilidades e desafios específicos. Conforme destacado por Artigue (2020b), essa etapa inicial de identificação possibilita aos educadores adaptarem suas abordagens de ensino para atender melhor às necessidades individuais de cada aluno. Ao compreender suas habilidades e dificuldades iniciais, os educadores podem planejar intervenções educacionais eficazes e direcionadas para as olimpíadas de matemática.

É importante que o docente esteja ciente de que, em um primeiro momento, os alunos podem encontrar algumas dificuldades ao manusear o aplicativo GeoGebra é uma etapa crucial para maximizar o potencial de aprendizado dessa ferramenta. De acordo com Santiago (2021), as dificuldades mais comuns incluem a compreensão da interface do aplicativo, a manipulação de ferramentas específicas e a interpretação dos resultados obtidos. Essas descobertas ressaltam a importância de oferecer suporte e orientação adequados aos alunos durante o processo de aprendizado com o GeoGebra.

Além disso, ao abordar as lacunas na compreensão da Geometria Plana e Espacial nas olimpíadas de matemática, é essencial considerar não apenas as dificuldades de aprendizagem, mas também as lacunas conceituais. Settimy e Bairral (2020) apontam que muitos alunos enfrentam dificuldades na visualização espacial, na aplicação de conceitos geométricos abstratos e na resolução de problemas não triviais. Ao identificar e abordar essas lacunas, os educadores podem melhorar significativamente o desempenho dos alunos e prepará-los de forma mais adequada para os desafios deste tipo de certame.

Considerando esse cenário, este trabalho propõe a utilização de um PO como ferramenta de ensino para geometria espacial oferecendo aos professores um recurso tecnológico diferenciado dos problemas encontrados nos livros didáticos, muitos dos quais, conforme observado por Almouloud (2017), tendem a enfatizar a mecanização do pensamento.

3. Concepção e análise *a priori*

Nesta seção, apresentamos uma proposta de SDO estruturada sobre um problema retirado da prova da OBMEP de 2023, na qual aborda o tema triângulo retângulo a partir de sólidos geométricos, demandando uma visão da transição da Geometria Plana para Geometria Espacial.

Consideramos a prova da OBMEP de 2023, segunda fase, Nível 3, destinada a estudantes do Ensino Médio. A questão selecionada explora a capacidade de visualização geométrica dos estudantes e a sua compreensão por meio da manipulação em diferentes perspectivas de objetos tridimensionais. A partir disso, esboçamos uma construção dos elementos do enunciado da questão no software GeoGebra, bem como um controle deslizante para sua manipulação e visualização do comportamento do sólido. Considera-se também a possibilidade de um impacto positivo na compreensão geométrica, o que pode ser atribuído ao estímulo do raciocínio geométrico a partir da visualização no software.

Sugere-se envolver os alunos em atividades cognitivas que explorem a visualização, utilizando o problema selecionado como modelo. Espera-se que, ao ter o raciocínio geométrico estimulado, os alunos investiguem soluções satisfatórias para a questão proposta, bem como utilizem esta compreensão para outras questões similares.

Considerando o desenvolvimento das demais fases da ED e da implementação prática desta SDO, sugerimos a elaboração de alguns acordos didáticos para orientar sua execução. Brousseau (2008) define o contrato didático como o acordo estabelecido entre professor e alunos, visando garantir o bom andamento da situação didática dentro do milieu estabelecido.

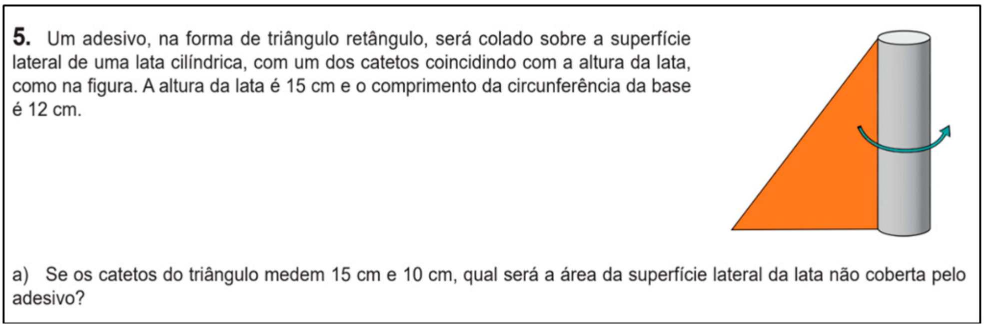
Nesta atividade, propõe-se aos estudantes a utilização do recurso construído no software GeoGebra para buscar a solução de uma SDO, no intuito de estimular a raciocínio geométrico mediante a manipulação e visualização da construção, utilizando as ideias que podem surgir para a solução do problema. Também é solicitado aos estudantes que registrem suas respostas em papel e, ao final, comentem sobre a experiência com o uso do GeoGebra para solucionar a SDO.

3.1. Situação Didática Olímpica

O problema inicialmente aborda o raciocínio geométrico utilizando uma figura dinâmica, onde a solução pode ser observada através de seus movimentos. Na Figura 1, a superfície lateral de uma lata cilíndrica é destacada em laranja, e essa cor permanece inalterada ao se movimentar ao redor do objeto cilíndrico. No entanto, a figura dinâmica sempre mantém a forma de um triângulo retângulo ao lado do cilindro:

Figura 1

SDO da OBMEP de 2023 da segunda fase.



5. Um adesivo, na forma de triângulo retângulo, será colado sobre a superfície lateral de uma lata cilíndrica, com um dos catetos coincidindo com a altura da lata, como na figura. A altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm.

a) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 10 cm, qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?

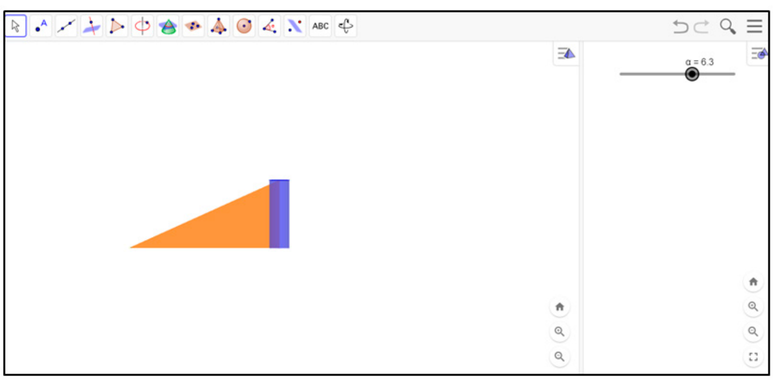
Fonte: OBMEP (2023).

Neste momento, propõe-se que os estudantes comecem a resolver o primeiro item da questão, seja individualmente ou em duplas. Dentro do ambiente previamente estabelecido, os estudantes podem trocar ideias e compartilhar informações em busca da solução. Deve-se conceder um intervalo de tempo para que o grupo apresente uma solução para essa situação. Em seguida, as etapas são apresentadas e discutidas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas (TSD), conforme previsto e planejado.

A SDO apresentada no problema olímpico da OBMEP foi adaptada e reconstruída no GeoGebra[1] conforme a Figura 2, permitindo a manipulação e visualização dos elementos modelados. Isso proporciona um estímulo adicional aos alunos durante o processo de resolução:

Figura 2

Desenvolvimento no GeoGebra da SDO.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Situação de ação: Na situação de ação, os alunos são introduzidos ao problema e incentivados a explorar a questão de forma independente ou em pequenos grupos. A atividade começa com a visualização da superfície lateral de um cilindro e a identificação das partes que compõem essa superfície: dois círculos (as bases do cilindro) e um retângulo, onde um dos lados do retângulo é igual à circunferência dos círculos. A construção no GeoGebra pode ser utilizada para simular a colagem do adesivo no cilindro e visualizar a sua superfície lateral, ajudando os alunos a compreender a geometria envolvida.

1. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/petj2myu.

Conforme Almouloud (2007), nesta fase apresenta-se ao aluno um problema específico, cuja solução ótima, dentro do contexto estabelecido, representa o conhecimento a ser ensinado. O aluno é desafiado a resolver a SDO e a extrair informações do contexto para uma tomada de posição inicial sobre o problema.

Inicialmente, os alunos devem calcular a área da superfície lateral do cilindro usando a fórmula: $A_l = h \times 2\pi r$. Para a primeira parte da questão, item (*a*), espera-se que os alunos identifiquem as dimensões da lata (altura de 15 cm e circunferência da base de 12 cm) e utilizem esses valores para calcular a área da superfície lateral do cilindro:

$$A_l = 15 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 180 \text{ cm}^2$$

Em seguida, os alunos devem calcular a área do triângulo adesivo usando a fórmula para a área de um triângulo retângulo: $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} = 75 \text{ cm}^2$Finalmente, espera-se que os alunos subtraiam a área do adesivo da área da superfície lateral do cilindro para encontrar a área não coberta:

$$\text{Área não coberta} = 180 \text{ cm}^2 - 75 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2$$

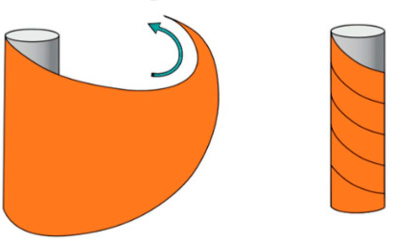
Para resolver este item, é possível que os alunos encontrem dificuldades ao tentar determinar a hipotenusa. Eles podem ter dúvidas sobre a aplicação das propriedades dos triângulos retângulos. O professor pode, então, instigar os alunos a refletirem sobre os procedimentos necessários para encontrar esse valor. Uma vez determinados os valores dos catetos, o professor pode solicitar aos alunos que observem como esses valores se comportam na movimentação da superfície da figura geométrica.

Nos itens (*b*) e (*c*) (Figura 3), a partir da observação da construção, o professor pode instigá-los a refletir sobre as possíveis estratégias de resolução da SDO:

Figura 3

Itens b e c da SDO proposta.

b) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 60 cm, o adesivo poderá ser enrolado cinco vezes sobre a lata. Qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?



c) Se um adesivo de catetos 15 e 90 cm for completamente enrolado no cilindro, qual será a área da superfície lateral da lata coberta por exatamente três camadas desse adesivo?

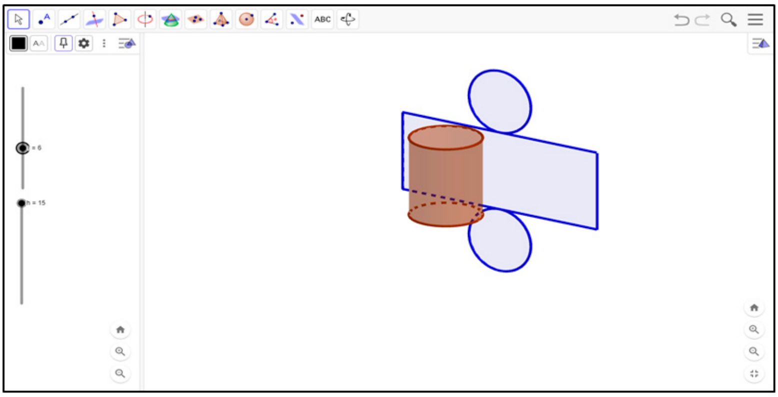
Fonte: Prova da OBMEP – 2ª fase (2023).

Primeiramente, é importante que os estudantes tenham como conhecimento prévio que a superfície de um cilindro circular reto é composta por dois círculos (as bases do cilindro) e um retângulo. O comprimento de um dos lados do retângulo é igual à circunferência dos círculos. Para isso, o professor pode utilizar a construção auxiliar[2] como sugestão (Figura 4):

2. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/cws8mcka

Figura 4

Planificação do cilindro no GeoGebra.



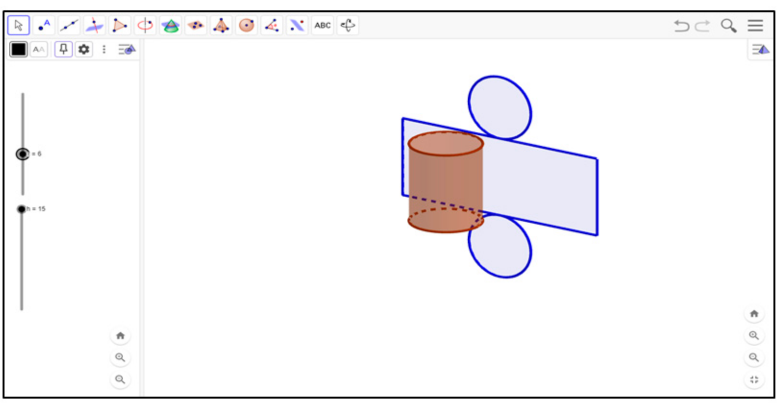
Fonte: Elaborado pelos autores.

Situação de formulação: Nesta etapa, os alunos devem observar, durante a movimentação do cilindro, a parte da superfície que não está coberta pelo adesivo mencionado no enunciado, identificando padrões na superfície lateral. Os alunos podem perceber que, mesmo sem usar cálculos complexos para triângulos retângulos, conseguem determinar a área não coberta pelo adesivo, utilizando as sugestões fornecidas durante a aula.

Se a altura da lata é de 15 cm e o comprimento da circunferência da base é de 12 cm, então esses serão os comprimentos dos lados do retângulo na planificação do cilindro. A Figura 5 mostra como o adesivo triangular, com catetos medindo 15 cm e 10 cm, será colado sobre a superfície lateral do cilindro. A área descoberta está marcada em cinza na planificação do retângulo.

Figura 5

Área coberta do cilindro planificado.



Fonte: Elaborado pelos autores.

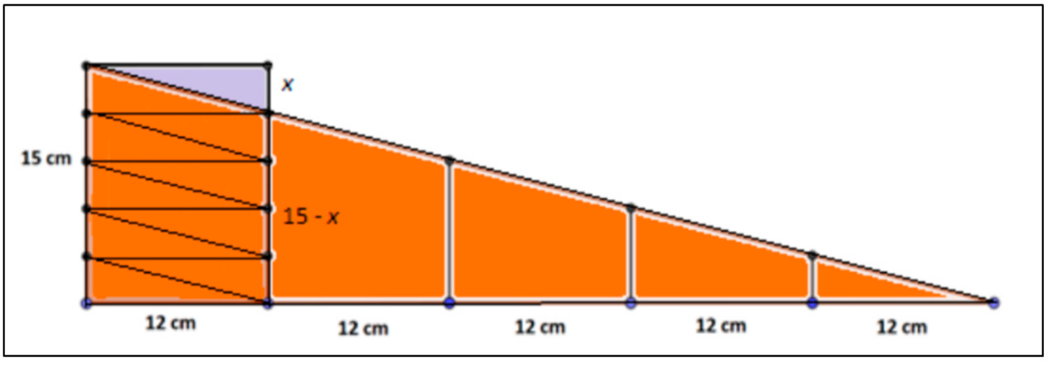
Nesta etapa do problema, os alunos começam a formular conjecturas sobre o problema e testar suas hipóteses (Almouloud, 2007). Eles podem perceber que, para a parte (b), a área do adesivo é significativamente maior e que o adesivo pode ser enrolado várias vezes ao redor da lata.

Assim, para resolver o item (b), os alunos devem considerar a semelhança dos triângulos formados na planificação do cilindro. Os comprimentos das divisões verticais do triângulo que representa o adesivo são iguais a $^4/_5$, $^3/_5$, $^2/_5$ e $^1/_5$ da altura da planificação, ou seja, 12 cm, 9 cm, 6 cm e 3 cm, respectivamente.

A Figura 6 mostra de uma forma mais clara, sobre o retângulo da planificação, as sobreposições das divisões do adesivo triangular correspondentes à sobreposição que ocorre a cada volta, e a divisão da altura em cinco partes de mesmo comprimento (3 cm):

Figura 6

Planificação e sobreposições das divisões do adesivo triangular.



Fonte: Site oficial da OBMEP (2023).

Na primeira volta, o adesivo deixará descoberto apenas o triângulo retângulo lilás com catetos medindo 12 cm e 3 cm; nas quatro voltas seguintes, o adesivo será colado sobre a parte já adesivada na volta anterior. Portanto, a área não coberta pelo adesivo será:

$$\text{Área não coberta} = {}^{(3\times12)}/_{2} = 18 \text{ cm}^2$$

Uma outra solução seria: O triângulo cinza de catetos x e 12 é semelhante ao triângulo de catetos 15 - x e 48. Logo,

$$^{x}/_{12} = {}^{15-x}/_{48}$$

e resolvendo a expressão, obtemos que x = 3 e, portanto, a área não coberta é: $^{(3\times12)}/_{2}$ = 18 cm^2.

Após realizar simulações com a construção, o professor pode sugerir que os alunos registrem suas observações. Nesse momento, espera-se que eles comecem a formular conjecturas (Brousseau, 1997; 2008). Um aspecto crucial é a adoção de uma linguagem ou forma de representação consistente, que permita inferir as conclusões apropriadas para alcançar a solução da SDO.

Situação de Validação: Nesta etapa, os alunos são incentivados a revisar suas soluções e justificar suas conclusões. Eles devem calcular a área não coberta pelo adesivo quando enrolado cinco vezes. A solução esperada é 18 cm^2, conforme descrito acima.

Para a parte (c), os alunos devem calcular a área do adesivo com catetos de 15 cm e 90 cm. O triângulo com cateto de 90 cm dará 7 voltas e meia ao redor da circunferência da base do cilindro (90 = 7 × 12 + 6) .

Na primeira volta, apenas o triângulo em lilás ficará sem adesivo na superfície cilíndrica. Após a segunda volta, somente o paralelogramo 1 indicado na figura ficará com apenas uma camada de adesivo. Após a terceira volta, apenas o paralelogramo 2 ficará com apenas duas camadas de adesivo. Após a quarta volta, teremos somente a região indicada como paralelogramo 3 coberta por apenas 3 camadas de adesivo, e essa é a região cuja área devemos calcular (Retomar a Figura 6).

Para determinar a altura da intersecção do adesivo com a vertical inicial após a primeira volta, podemos usar a semelhança:

$$^{90}/_{15} = {}^{78}/_{y} \Rightarrow y = {}^{(78\times15)}/_{90} = 13 \text{ cm}$$

Os paralelogramos sucessivos 1, 2 e 3 terão os lados verticais medindo:

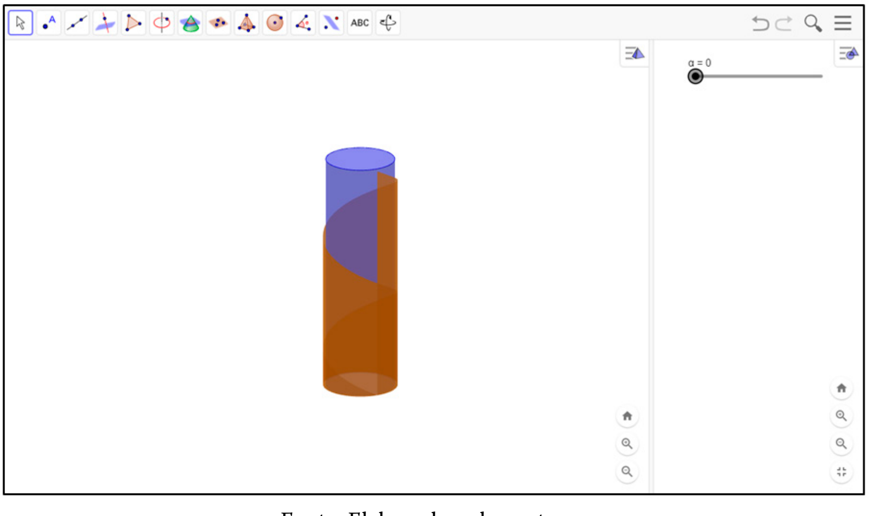
$$15 - {}^{(78\times15)}/_{90} = 15 - 13 = 2 \text{ cm}$$

Como a altura relativa a esses lados é de 12 cm, a área dos paralelogramos (incluindo o paralelogramo 3) é: Área = 2 cm × 12 cm = 24 cm^2

A utilização do GeoGebra permite que os alunos visualizem o processo de colagem do adesivo e compreendam melhor como as áreas são cobertas ou descobertas ao enrolar o adesivo no cilindro. Ilustramos a área coberta pelo adesivo na Figura 7:

Figura 7

Área coberta do cilindro planificado.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Situação de institucionalização: Nesta etapa, o conhecimento adquirido é consolidado e formalizado. O professor pode resumir as estratégias utilizadas e discutir as soluções encontradas, destacando a aplicação de conceitos geométricos e a importância de visualizar e manipular figuras geométricas para resolver problemas. A integração do GeoGebra na análise proporciona um entendimento mais profundo e uma aprendizagem mais significativa.

O professor pode apresentar a SDO no GeoGebra para analisar as soluções encontradas pelos alunos e verificar sua validade. Em seguida, o professor explica aos alunos o propósito da atividade, destacando como ocorre a construção dos cálculos da superfície lateral da lata.

O conhecimento adquirido durante a SDO é formalmente integrado ao saber matemático dos alunos, que compreendem sua construção através das estratégias e interações realizadas no software GeoGebra.

4. Experimentação

Segundo Almouloud e Silva (2012, p. 27), a fase de experimentação em uma Engenharia Didática "consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação".

Esta pesquisa envolveu a participação de 24 estudantes do Ensino Médio, distribuídos entre as três séries, que integraram um Grupo de Estudos direcionado à preparação destes para exames de Olimpíadas de Matemática (Grupo Olímpico). As atividades foram conduzidas na Escola Estadual de Educação Profissional Professora Lysia Pimentel Gomes Sampaio Sales, localizada em Sobral, na Zona Norte do estado do Ceará, vinculada à 6ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação (CREDE 06). Os estudantes que integram o Grupo Olímpico atuam como monitores de matemática e foram admitidos por meio de um processo seletivo interno, demonstrando interesse próprio na participação (Sousa e Alves, 2024).

Os encontros do Grupo Olímpico foram realizados semanalmente às quartas-feiras, durante todo o ano de 2023, nos intervalos do almoço, no Laboratório de Matemática da escola. Durante as sessões, os estudantes se engajavam na resolução de questões olímpicas, discutiam e compartilhavam suas estratégias de solução, exploravam questões de provas da OBMEP de edições anteriores, bem como os materiais do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) e do Portal da Matemática, que fornecem um aporte de materiais para estudos, além de trocarem experiências sobre suas participações em outras olimpíadas e eventos similares.

A professora pesquisadora atuou como facilitadora durante os encontros, acompanhando os estudantes e desempenhando um papel central no planejamento da sequência dos temas de discussão, adaptação de materiais e mediação, bem como identificando seus progressos, dificuldades e necessidades de apoio, como preconiza a TSD (Brousseau, 2008).

Os estudantes, por sua vez, desenvolviam em conjunto, realizavam a exposição de suas estratégias de solução e compartilhavam conhecimentos na resolução de trabalhos dirigidos. Além disso, foi criado um grupo no *WhatsApp* para comunicações e interações relacionadas aos encontros e uma turma no Google Sala de Aula, em que a professora disponibilizava materiais como livros, vídeos, atividades dirigidas, simulados, entre outros recursos.

Nesta SDO, em particular, os dados foram coletados a partir de registros fotográficos, materiais escritos e observações da professora pesquisadora durante a resolução da situação , bem como as impressões dos estudantes ao utilizar o GeoGebra para manipulação do recurso construído para solucionar a questão. Esta SDO foi desenvolvida em dezembro de 2023, após a segunda fase da OBMEP do referido ano, em que o primeiro contato de fato com o problema ocorreu no dia da prova oficial da OBMEP.

A referida questão possui uma abordagem diferente do que comumente ocorre neste certame, pois demandou um raciocínio geométrico visual, a partir da compreensão da transição da visão plana-espacial da geometria, o que causou estranhamento aos estudantes, razão pela qual este item foi escolhido para discussão. Para preservar as identidades dos estudantes, estes serão nominados como E1 (Estudante 1), E2 (Estudante 2), ..., E24 (Estudante 24).

Na subseção seguinte apresentamos uma descrição de como a SDO foi desenvolvida, conforme as dialéticas da TSD.

4.1. Percurso da experimentação

A princípio, a professora estabeleceu com a turma o contrato didático, explicando a necessidade de que os estudantes registrarem suas respostas ao problema olímpico de forma escrita, bem como ao final, comentarem de que forma o GeoGebra foi utilizado e se ele contribuiu (ou não) para alcançar a solução da SDO. Os estudantes foram orientados a se dividirem em pequenos grupos e utilizarem os tablets educacionais para acessar a construção disponibilizada pela professora.

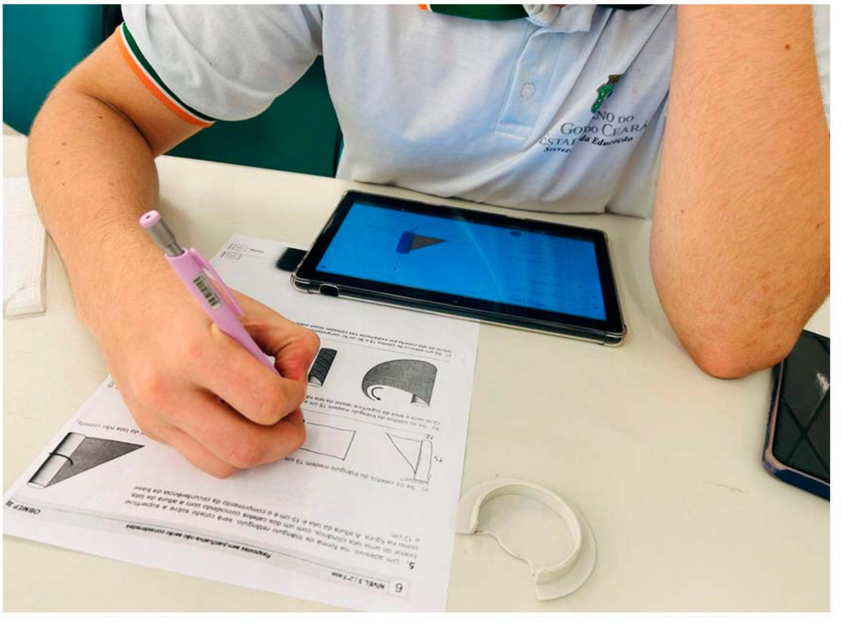
Na *situação de ação*, os estudantes tiveram contato com o problema e discutiram como tiveram dificuldades no dia da prova da segunda fase da OBMEP ao resolver esta questão. Alguns mencionaram que deixaram o item em branco, outros que tentaram, mas não desenvolveram por completo, outros afirmaram que erraram totalmente. Uma afirmação de um dos estudantes que chamou a atenção foi: *"Nunca vi Geometria Espacial caindo nas provas da OBMEP"* (E3).

De fato, dentre os conteúdos de Geometria que comumente são contemplados neste exame, menciona-se apenas a Geometria Plana. No entanto, ainda no decorrer desta discussão, outro estudante afirmou que *"Esta questão apenas parece Geometria Espacial, mas na verdade ela é de Geometria Plana, envolve só Pitágoras"* (E5).

Na *situação de formulação*, os estudantes formaram duplas para discutir como resolver a questão. Utilizaram folhas de papel A4 para simular o movimento do adesivo ao redor do cilindro. Em paralelo, manipularam o controle deslizante do GeoGebra e tentaram esquematizar no papel como a movimentação da construção mostrava o desenrolar do adesivo e descrever matematicamente seu comportamento no papel. Nas Figura 8 e 9 apresentamos registros desta etapa:

Figura 8

Registro da situação de formulação da TSD.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Figura 9

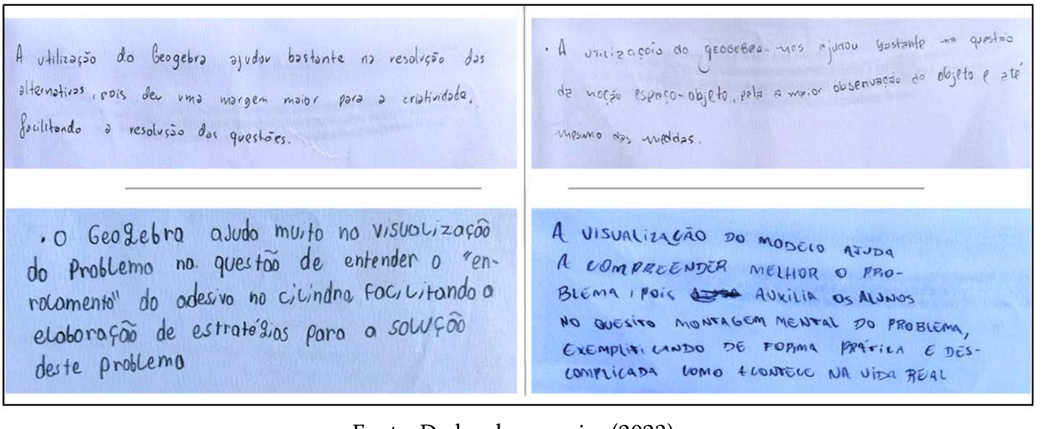
Registro da situação de formulação da TSD.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Alguns registros escritos dos estudantes foram coletados. Dentre as falas, no que diz respeito ao uso do GeoGebra, foi apontado que seu uso *"facilita uma visualização para desenhar o problema"* (E10), e que poderia ajudar a resolver situações semelhantes. Mesmo que o software não possa ser utilizado durante a prova, o suporte visual da construção pode estimular o pensamento geométrico do aluno, permitindo-o conjecturar raciocínios mais bem elaborados. Os alunos apontaram isso em algumas falas, que solicitamos que escrevessem ao final da atividade, para registrar sua experiência com o software na resolução de problemas olímpicos. As falas dos alunos se assemelham em alguns pontos, mas, devido a brevidade deste manuscrito, exemplificamos uma amostra do total (Figura 10):

Figura 10

Visão dos alunos sobre a experiência com o GeoGebra.



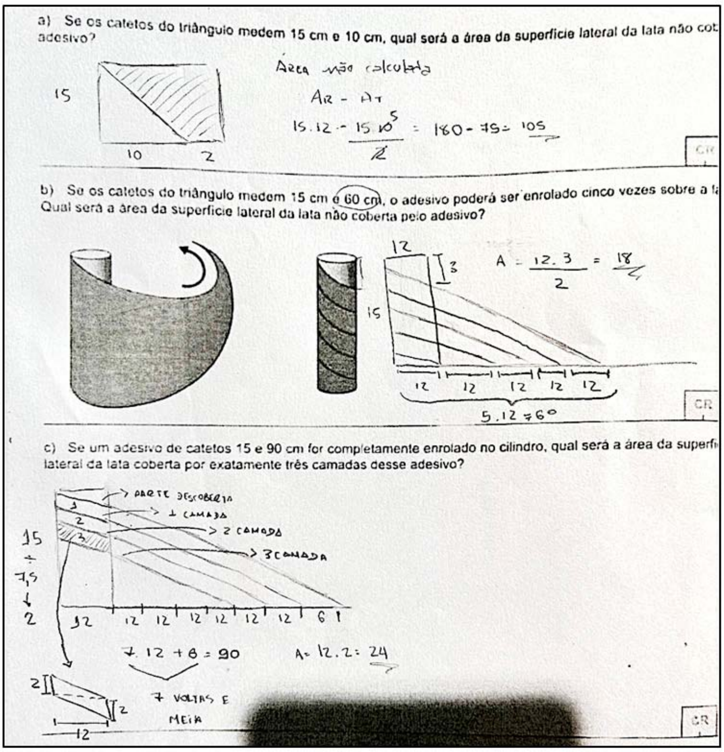
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Diante destas falas, os alunos concordaram que o GeoGebra como ferramenta auxiliou na visualização e construção do raciocínio geométrico, ao utilizarem os termos "criatividade", "noção espaço-objeto", "elaboração de estratégias" e "montagem mental", corroborando com o que Alves (2020a; 2020b; 2021) aponta em suas pesquisas. Ademais, os relatos dos alunos, bem como seus materiais escritos, participação e engajamento atenderam ao contrato didático (Brousseau, 2008) solicitado pela professora no início do percurso investigativo. A curiosidade e o interesse no uso do software instigou-os neste processo.

Na situação de validação, podemos perceber que os estudantes realmente utilizaram a possibilidade de manipulação no software para mostrar suas soluções, desenhando e rabiscando os cálculos no papel com base nos movimentos do controle deslizante. Um exemplo disso pode ser ilustrado na Figura 11:

Figura 11

Resolução da dupla de alunos E7 e E10.

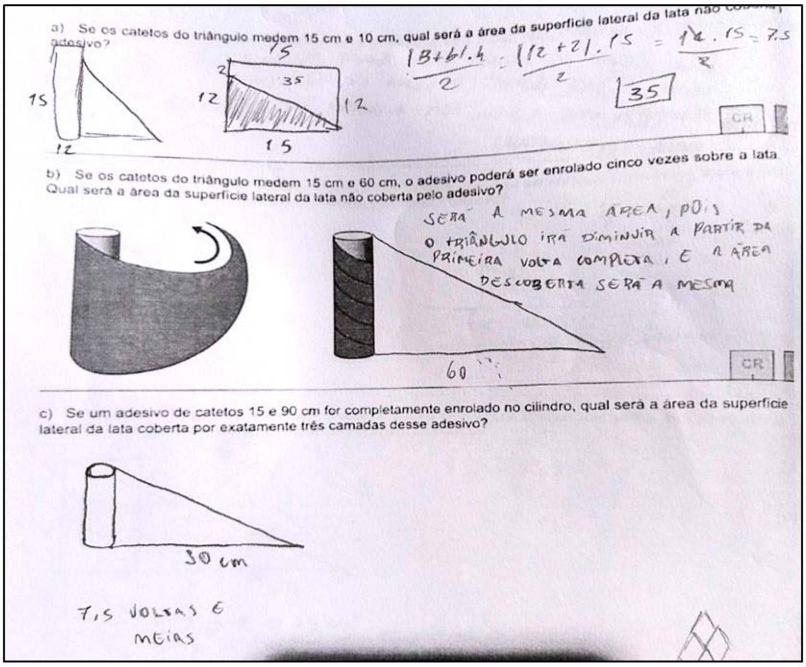


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Observamos que a dupla E7 e E10 resolveram corretamente todos os itens e apresentaram a solução de maneira clara. No caso da dupla E8 e E15, temos algumas divergências nos resultados, como registrado na Figura 12:

Figura 12

Resolução da dupla de alunos E8 e E15.



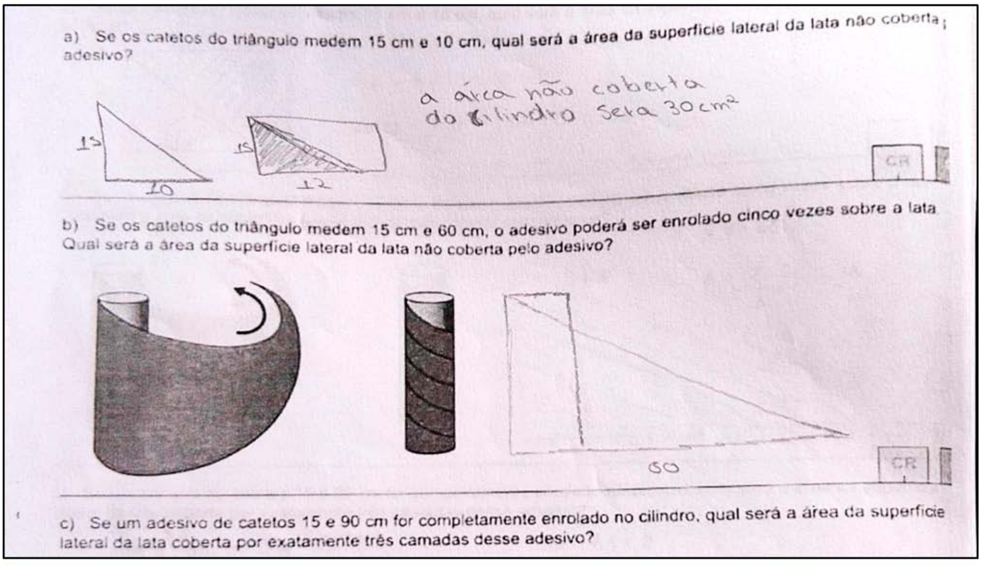
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Note que a dupla E8 e E15 se equivocou nos itens, mas que há um raciocínio parcialmente correto nos itens (*a*) e (*c*).

E a dupla de estudantes E5 e E9, destoou da resolução correta, mas posteriormente, na etapa de validação, compreenderam a forma como os colegas apresentaram a solução, mostrando o movimento do adesivo enrolando no cilindro no software. Vale ressaltar que estes estudantes apenas abriram o arquivo da construção, mas não tiveram a curiosidade de manipulá-la de diversos ângulos. Alegaram que "*não conseguiam se concentrar no papel e no software, pois não tinham costume*" e, posteriormente, afirmaram "*ter dificuldades de visualizar os procedimentos para o cálculo*", o que é uma contradição e de certa forma quebra o contrato didático previamente estabelecido. A solução desta dupla pode ser vista no registro da Figura 13:

Figura 13

Resolução da dupla de alunos E5 e E9.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na implementação, a sessão de ensino foi executada conforme planejado. Os estudantes foram instruídos a utilizar o GeoGebra para visualizar e simular a questão, trabalhando em duplas ou pequenos grupos. Eles discutiram suas estratégias e registraram suas soluções, tanto no software quanto em papel.

Na *situação de institucionalização*, a professora consolidou o conhecimento adquirido pelos estudantes, revisando as estratégias utilizadas e discutindo as soluções encontradas, à medida que destacaram a aplicação de conceitos geométricos fundamentais, como o Teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos, para resolver a questão. Enfatizou, ainda, a importância de visualizar e manipular figuras geométricas para resolver problemas complexos, mostrando como o uso do GeoGebra pode ser uma ferramenta poderosa para desenvolver o pensamento geométrico.

Além disso, os alunos foram incentivados a refletirem sobre a experiência e a escreverem sobre como o GeoGebra contribuiu para a resolução do problema. Ela destacou que, mesmo sem a possibilidade de utilizar o software durante a prova, a prática com ferramentas visuais pode melhorar a compreensão e a habilidade dos alunos em resolver problemas de forma mais eficiente e precisa.

Durante a observação do desenvolvimento dos alunos, foi registrado um engajamento significativo. Os estudantes interagiram ativamente com a ferramenta GeoGebra e entre si, trocando ideias e estratégias para resolver a questão. O uso do software facilitou a compreensão do problema e permitiu uma abordagem mais visual e dinâmica.

5. Análise *a posteriori* e validação interna

De acordo com Almouloud (2007), a etapa de análise *a posteriori* e validação envolve a avaliação detalhada dos resultados obtidos durante a aplicação de uma situação didática, considerando a interação dos alunos com as atividades propostas e os instrumentos didáticos utilizados.

Neste caso, a análise focará na utilização do GeoGebra e na aplicação da TSD para resolver um problema geométrico da OBMEP 2023. A análise dos resultados obtidos durante as sessões experimentais de ensino é essencial para avaliar o aprendizado dos alunos e a influência da intervenção didática proposta. Com base nos registros coletados, tanto escritos quanto observacionais, foi possível identificar avanços significativos na compreensão dos conceitos geométricos abordados.

Os registros mostram que os alunos foram capazes de aplicar os princípios da semelhança de triângulos para resolver a questão proposta, demonstrando uma melhora na habilidade de manipulação geométrica e visualizando, de fato, que se trata de uma questão de Geometria Plana e não Espacial, como cogitado anteriormente na experimentação. A utilização do GeoGebra como ferramenta de visualização e simulação foi particularmente útil para facilitar a compreensão e a resolução do problema, conforme destacado nas falas dos estudantes. Além disso, as falas dos alunos revelaram uma percepção positiva sobre o uso do GeoGebra, indicando que a ferramenta contribuiu significativamente para a visualização e a compreensão do problema.

Na análise *a priori*, foi previsto que os alunos, ao utilizar o GeoGebra, conseguiriam visualizar e compreender a questão de forma mais eficaz, aplicando conceitos de Geometria Plana e o Teorema de Pitágoras para resolver a situação didática. Esperava-se que os alunos discutissem e registrassem suas estratégias e soluções, facilitadas pelo uso da ferramenta tecnológica.

No decorrer da experimentação, observou-se que, de fato, os alunos utilizaram o GeoGebra para visualizar o problema e desenvolver suas soluções. Houve um engajamento significativo na manipulação da ferramenta, e os registros escritos confirmaram que a visualização proporcionada pelo software ajudou na compreensão dos conceitos envolvidos.

Durante a implementação da situação didática, surgiram alguns obstáculos didáticos imprevistos. Os alunos demonstraram dificuldades iniciais em conectar o problema com conceitos de Geometria Plana e em coordenar o uso simultâneo de representações no papel e no GeoGebra. Esses desafios apontam para a necessidade de uma introdução mais gradual ao software, com uma abordagem que facilite a integração entre representações visuais e conceituais. Almouloud (2007) destaca a importância de criar um ambiente de aprendizagem que permita aos alunos confrontar e superar suas dificuldades, promovendo assim um aprendizado mais profundo e significativo.

A análise crítica do processo de ensino, baseada nos resultados obtidos, revela o impacto positivo da abordagem utilizada, mas também aponta áreas para melhoria. A integração do GeoGebra na prática docente se mostrou vantajosa, mas a necessidade de um treinamento prévio dos alunos no uso da ferramenta foi evidente.

A reflexão sobre a prática docente também sugere a importância de diversificar as estratégias de ensino para atender às diferentes necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos. A criação de atividades que combinem manipulação concreta, visualização digital e abstração matemática pode enriquecer esse processo.

A TSD, enquanto teoria de ensino, mostrou-se uma abordagem didática adequada para este tipo de problema, pois proporcionou uma estrutura de aula em que o estudante se comportou de forma autônoma, em busca de compreender o problema, interagir em pequenos grupos e explorar o software GeoGebra. Assim, esta abordagem permitiu analisar as diversas fases da situação didática – desde a fase de ação e formulação até a validação e institucionalização do conhecimento – sendo um aporte teórico importante na identificação das dificuldades enfrentadas pelos alunos, os progressos alcançados e a forma como construíram sua compreensão geométrica do problema. Ademais, a estruturação da sessão de ensino com a TSD foi relevante para interpretar as respostas dos estudantes de maneira mais coerente, evidenciando além de suas estratégias de resolução, também as mudanças conceituais promovidas pelo uso de uma representação visual e tecnológica.

Para otimizar a influência da abordagem didática em futuras intervenções, sugere-se uma introdução gradual do GeoGebra, bem como a conexão entre representações, ao estabelecer relações claras entre as visualizações geométricas no papel e no software, facilitando a transição entre o concreto e o abstrato.

6. Considerações finais

A presente pesquisa investigou a influência do uso do GeoGebra em uma situação didática envolvendo um problema geométrico da OBMEP 2023. Através da aplicação da Teoria das Situações Didáticas, buscou-se proporcionar aos alunos uma experiência de aprendizado mais interativa e visual, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos envolvidos. Os resultados da experimentação demonstraram que a utilização do GeoGebra foi uma estratégia que influenciou positivamente na melhoria da compreensão dos alunos sobre conceitos de Geometria Plana e Espacial, além de facilitar a aplicação do Teorema de Pitágoras e dos princípios de semelhança de triângulos. A ferramenta permitiu que os alunos visualizassem e manipulassem as figuras geométricas de forma dinâmica, o que contribuiu para um aprendizado mais significativo.

A análise a posteriori revelou que, embora os resultados tenham sido positivos, alguns obstáculos didáticos foram identificados. A necessidade de um processo gradual de introdução ao uso do GeoGebra, estabelecendo conexões explícitas e consistentes entre representações visuais e conceitos abstratos, emergiu como um ponto a ser refletido e aperfeiçoado. Esses obstáculos sugerem que, para uma implementação mais eficiente da ferramenta, é importante preparar os alunos para o seu uso, começando com atividades mais simples antes de abordar problemas complexos.

A implementação da situação didática e a subsequente análise crítica do processo de ensino evidenciaram a importância de diversificar as estratégias pedagógicas e integrar tecnologias educacionais, promovendo uma prática docente mais reflexiva e ajustada às demandas dos alunos, maximizando, assim, o potencial das ferramentas tecnológicas disponíveis. Com efeito, considera-se que a formação continuada dos professores no uso de tecnologias educacionais, ampliando suas competências pedagógicas e tecnológicas, é também essencial para o sucesso de abordagens baseadas em tecnologia.

Com base nos resultados e nas reflexões obtidas, propõem-se as seguintes melhorias para futuras intervenções: introdução gradual e planejada de ferramentas tecnológicas, desenvolvimento de atividades que incentivem a conexão entre representações visuais e conceitos matemáticos abstratos, investimento na formação continuada dos professores, e diversificação das estratégias didáticas para atender aos diferentes estilos de aprendizagem dos alunos, sobretudo no contexto de treinamento olímpico. Essas sugestões têm como objetivo melhorar a adequação e a qualidade da abordagem didática, promovendo um ambiente de aprendizagem mais instigante e motivador.

A integração do GeoGebra na prática pedagógica revelou-se uma abordagem promissora para o ensino da geometria, permitindo que os alunos desenvolvessem habilidades de visualização e manipulação geométrica de maneira produtiva e direcionada. A aplicação da Teoria das Situações Didáticas possibilitou a criação de um ambiente de aprendizado dinâmico e interativo, promovendo a reflexão crítica e o desenvolvimento do pensamento matemático, o que é essencial para a resolução de problemas olímpicos. Espera-se que futuras intervenções possam continuar a explorar e expandir o uso de tecnologias educacionais no ensino da matemática, sobretudo em abordagens que trabalhem os tópicos recorrentes em exames de olimpíadas, contribuindo para a formação de alunos mais competentes e confiantes em suas habilidades matemáticas.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores agradecem a participação dos estudantes do Grupo Olímpico da EEEP Professora Lysia Pimentel Gomes Sampaio Sales, em Sobral – CE, Brasil e o incentivo das atividades por parte da equipe do Núcleo Gestor da instituição.

O terceiro autor agradece ao apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. UFPR.

Almouloud, S. A. (2017). Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, *13*(27), 5-35. http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.5514.

Almouloud, S. A., e Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *3*(1), 62-77. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62.

Almouloud, S. A., e Silva, M. J. F. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 22-52. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22.

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situations (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Naposcencia*, *12*(2), 97-116. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8.

Alves, F. R. V. (2020a) Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): Ensino de Olímpiadas de Matemática com Arrimo do Software GeoGebra como Recurso de Visualização. *Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, *13*(1), 319-349. https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

Alves, F. R. V. (2020b). Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da Teoria das Situações Didáticas para o Ensino de Olimpíadas. *Revista Contexto & Educação*, *36*(113), 116-142. https://doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142.

Alves, F. R. V. (2021). Situação Didática Olímpica (SDO): Aplicações das Teoria das Situações Didáticas para o Ensino de Olímpiadas. *Revista Contexto & Educação*, *36*(113), 116-142. https://doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142.

Artigue, M. (2020a). Didactical Engineering. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Second Edition (pp. 202-206). New York: Springer.

Artigue, M. (2020b). Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: Où en sommes-nous? *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(3), 25-64. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064.

Bragança, B. (2013). *Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, Brasil.

Brasil. (2019). *Relatório Brasil no PISA 2018*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, INEP. http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf.

Brousseau, G. (1997). *La Théorie des Situations Didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Ática.

Costa, A. P. (2020). Abstrações em Geometria: uma alternativa para análise do pensamento geométrico. *Vidya*, *40*(1), 137-158. https://www.doi.org/10.37781/vidya.v40i1.2996.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry*. 2nd edition. Wiley.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: Didactique et Sciences Cognitives, *36*, Strasbourg. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (pp. 5-53). Strasbourg: IREM.

Guzmán. M. (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. In *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (pp. 66-90). Crete, Greece, July 1-6.

IMPA. (2019). *OBMEP 12 anos*. Biênio 2017-2018. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf.

OBMEP. (2023). *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Prova da 2ª fase, nível 3, 2023. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). http://www.obmep.org.br/provas.htm.

Santiago, P. V. S. (2021). *Olimpíada Internacional de Matemática*: situações didáticas olímpicas no ensino de Geometria Plana. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.

Settimy, T. F. O., e Bairral, M. A. (2020). Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial. *Vidya*, *40*(1), 177–195. https://www.doi.org/10.37781/vidya.v40i1.3219.

Senechal, M. (1990). Shape. In L. A. Steen (Ed.). *On the Shoulders of Giants – New Approaches to Numeracy* (pp. 139-189). Washington: National Academy Press.

Silva, M. M. L. (2016). *Geogebra 3D:* estudo dos poliedros de Platão com licenciandos de matemática à luz da teoria dos registros de representações semióticas. Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, Brasil.

Silva, J. G. A., Alves, F. R. V., e Menezes, D. B. (2021). Situação Didática Olímpica - SDO: um problema olímpico aplicado à teoria das situações didáticas. *Revista Thema*, *19*(2), 265–278. https://doi.org/10.15536/thema.V19.2021.265-278.1725.

Sousa, R. T., e Alves, F. R. V. (2024). A Teoria das Situações Didáticas no contexto de competições olímpicas: a experiência na Olimpíada Internacional Mathématiques Sans Frontières. *Revista DoCEntes*, *9*(25), 12-19. https://periodicos.seduc.ce.gov.br/revistadocentes/article/view/1079.

Sousa, R. T., Santiago, P. V. S., e Alves, F. R. V. (2022). Modelagem Matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do software GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, *32*, 34-43. https://doi.org/10.24215/18509959.32.e4.

Souza, D. C., Castro, J. B., e Barreto, A. L. O. (2020). Desempenho, representações e estratégias de estudantes do 5º ano do ensino fundamental, na resolução de situações de combinatória. *Vidya*, *40*(2), 397-416. https://doi.org/10.37781/vidya.v40i2.3367.