
Revista de Estudios y Experiencias en Educación REXE

journal homepage: <http://revistas.ucsc.cl/index.php/rexe>

Trabajo Matemático de Futuros Profesores Basado en una Secuencia de Tareas con Tecnología en Contextos Simulado y Colaborativo

Marcelo Ibáñez-Carrasco y Carolina Henríquez-Rivas
Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

Recibido: 13 de noviembre 2024 - Revisado: 06 de marzo 2025 - Aceptado: 06 de abril 2025

RESUMEN

Este artículo presenta resultados de un estudio con enfoque cualitativo sobre la enseñanza de un contenido geométrico desarrollado por futuros profesores de matemática. Se busca caracterizar el trabajo matemático de los participantes al resolver una propuesta para la enseñanza de la geometría con uso de tecnología en un contexto simulado y colaborativo. Los análisis se sustentan en los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y el diseño de tareas en educación matemática. Los resultados revelan los diferentes componentes activados al analizar el ETM personal e idóneo de los futuros profesores. Finalmente, se discute sobre aspectos del trabajo matemático, y se concluye sobre las limitaciones y los aportes del estudio para la formación inicial de profesores.

Palabras clave: Geometría; espacio de trabajo matemático; tareas; futuro profesor; tecnología.

*Correspondencia: Marcelo Ibáñez Carrasco (M. Ibáñez).

 <https://orcid.org/0009-0004-6050-235X> (marcelo.ibanez@alu.ucm.cl).

 <https://orcid.org/0000-0002-4869-828X> (chenriquezr@ucm.cl).

Mathematical Work of Future Teachers Based on a Sequence of Tasks with Technology in Simulated and Collaborative Contexts

ABSTRACT

This article presents the results of a qualitative study on the teaching of geometric content developed by future mathematics teachers. The aim is to characterize the mathematical work of the participants in solving a proposal for teaching geometry using technology in a simulated and collaborative context. The analyses are based on Mathematical Workspaces (MWS) and task design in mathematics education. The results reveal the different components activated when analyzing the personal and ideal MWS of future teachers. Finally, aspects of mathematical work are discussed, and conclusions are drawn about the limitations and contributions of the study to initial teacher training.

Keywords: Geometry; mathematical workspace; tasks; future teacher; technology.

1. Introducción

En este artículo se presentan los análisis del trabajo matemático desarrollado por futuros profesores (FP), que participan en una propuesta para la enseñanza de la geometría con uso de tecnología en un contexto simulado y colaborativo. El contexto de desarrollo se enmarca en una actividad planteada durante la formación inicial docente (FID). La propuesta se basa en un primer momento de resolución de una secuencia de tareas y, un segundo, de entrevistas a los participantes con respecto a la enseñanza de dicha secuencia.

Los estudios sobre la FID en educación matemática han tomado mayor relevancia durante los últimos años (Bufoin et al., 2022). Especialmente, aquellos trabajos que ponen énfasis en los conocimientos o habilidades que deben adquirir los FP, como también los formadores (Rojas et al., 2021). En este sentido, Pereira y Monteiro (2019) exponen diferentes desafíos en la FID, relacionada con el conocimiento de los estudiantes, factores de carácter personal o externos, entre otros.

En el campo de la educación matemática se apunta a una creciente incorporación de herramientas tecnológicas para complementar, potenciar, automatizar y facilitar el trabajo matemático en procesos de enseñanza y aprendizaje (Hanna et al., 2019). También, Ball y Brazel (2018) señalan que el apoyo de tecnologías permite a los estudiantes desarrollar diferentes conocimientos matemáticos, además de potenciar la comunicación y colaboración. Asimismo, en la investigación de Lagrange y Richard (2022), los autores abordan el razonamiento matemático, a través de procesos distintos al razonamiento discursivo, relacionando el uso de la prueba con tecnología y con el sustento de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático. De aquí que, el presente estudio pone atención en el trabajo matemático basado en integración de herramientas tecnológicas relacionados con procesos de enseñanza y aprendizaje para el aula.

En el dominio de geometría, Sariyasa (2017) señala que la implementación en un entorno de aprendizaje asistido por tecnología permite salir de la enseñanza tradicional, obtener aprendizajes más significativos y una mayor participación de manera más activa y profunda. Otros investigadores presentan el desarrollo del trabajo geométrico de futuros profesores con uso de lápiz-papel y tecnología (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). Se reporta que existe una

amplia gama para la elección de software de geometría dinámica (Roanes y Solano, 2023), tales como GeoGebra y su impacto en educación matemática. Así, la presente investigación resalta el aporte del mencionado software en la enseñanza de la matemática y su implicancia en la obtención de aprendizajes más profundos en los estudiantes.

En cuanto a la relevancia del trabajo colaborativo, Aparicio y Sepúlveda (2019) exponen acerca de factores facilitadores y obstaculizadores, destacando su implicancia positiva en el desarrollo profesional de profesores en distintas etapas laborales. Algunos autores caracterizan las intervenciones simuladas en FID con un enfoque didáctico para la resolución de situaciones o tareas (Breda et al., 2021; Sanhueza Vega et al., 2023). De esta manera, surge interés por investigar intervenciones en la FID de matemática en contextos simulados y colaborativos.

A partir de lo anterior, la presente investigación se plantea como objetivo *caracterizar el trabajo matemático de futuros profesores que participan en una propuesta para la enseñanza de la geometría con uso de tecnología en un contexto simulado y colaborativo*.

2. Marco Teórico

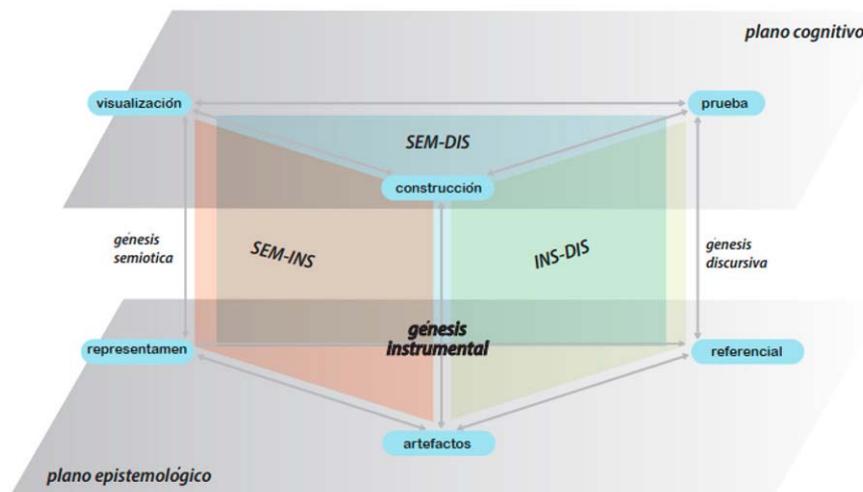
2.1. Espacios de Trabajo Matemático (ETM)

La teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) (Kuzniak et al., 2022), se centra en el análisis, descripción y comprensión de la actividad matemática en relación con el aprendizaje y enseñanza de individuos que se enfrentan a problemas matemáticos (Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak et al., 2016). En los ETM, el estudio didáctico del trabajo matemático es entendido como un trabajo intelectual de producción, definido y sustentado por la matemática, en donde participan activamente profesores y estudiantes (Kuzniak et al., 2022). Así, en esta teoría las tareas resultan ser el medio para la resolución de problemas y, su definición considera cualquier tipo de problema matemático con preguntas correctamente formuladas para su solución en un tiempo predecible (Kuzniak et al., 2016).

En los ETM se considera la relación entre dos tipos de planos, epistemológico y cognitivo, propios de la actividad matemática en la resolución de problemas. El plano epistemológico, se relaciona con el contenido matemático del dominio estudiado (geometría, álgebra, etc.) y, el otro plano de naturaleza cognitiva, que concierne la relación de los procesos adoptados por el sujeto al resolver tareas matemáticas (Kuzniak et al., 2022). El plano epistemológico está constituido por tres componentes: *representamen*, conjunto de símbolos concretos y tangibles; *artefactos*, de tipo material, simbólico o tecnológico, como herramientas de dibujo, signos o software; *referencial teórico*, basado en definiciones, propiedades y teoremas. El plano cognitivo se estructura en base a tres procesos: *visualización*, en relación con la interpretación de signos; *construcción*, dependiente de los artefactos que se utilizan; *prueba*, todo razonamiento discursivo que depende de los conocimientos del individuo. Así, estos planos se articulan mediante tres génesis: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*, permitiendo representar las relaciones e interacciones entre los diferentes componentes y procesos producidas por sujetos que realizan tareas matemáticas en diversos contextos educativos (Kuzniak et al., 2022). Esta relación entre planos, componentes y génesis se ilustra en el siguiente diagrama (figura 1).

Figura 1

Diagrama de los componentes del ETM.



Nota: Adaptado y traducido de Kuzniak et al. (2016, p. 725).

Las interacciones entre las génesis y sus componentes implicadas se representan por *planos verticales*. El uso de estos planos contribuye a identificar las circulaciones o rutas del trabajo matemático (Montoya-Delgado et al., 2014). Los autores identifican tres planos verticales (Kuzniak et al., 2016): El *plano semiótico-discursivo* [Sem-Dis], cuando se coordina el proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento de prueba; el *plano semiótico-instrumental* [Sen-Ins], referido al uso de artefactos para la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o en la exploración de representaciones semióticas; el *plano instrumental-discursivo* [Ins-Dis], cuando el discurso de prueba está basado en una experimentación con artefacto, o bien la validación discursiva de una construcción (figura 1).

2.2. Uso de tecnología desde los ETM

En los ETM, el proceso de construcción desarrollado por un individuo está basado en acciones desencadenadas por los artefactos y las técnicas de uso asociadas (Kuzniak et al., 2016). En el estudio de la integración de herramientas digitales en el aula para la enseñanza de un contenido matemático, este estudio considera la investigación sobre artefactos digitales con atención en la génesis instrumental (Lagrange y Richard, 2022). La noción de herramienta o artefacto digital se emplea a la variedad de dispositivos omnipresentes, caracterizados por la representación de datos y tratamiento algorítmico. En este sentido, los sistemas de geometría dinámica favorecen los procesos de visualización, construcción y prueba de los ETM (Arzarello et al., 2002; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021).

2.3. Diseño de tareas desde los ETM

El término *tareas* se define como una presentación escrita de una experiencia matemática planificada para alumnos, que consiste en una acción o secuencias de acciones que abarcan desde un solo problema hasta una exploración interdisciplinaria compleja (Watson y Thompson, 2015). Referente al diseño de tareas, los autores se basan en tres aspectos interrelacionados: (1) la naturaleza y estructura de la tarea; (2) el propósito pedagógico/didáctico de su diseño; (3) la actividad matemática prevista/implementada.

De esta manera, el uso de tareas tiene como objetivo crear una acción matemática a través de imágenes visuales y/o escritas, presentadas en diferentes formatos como hojas de trabajo, imágenes de pantalla y otras tecnologías digitales (Watson y Thompson, 2015). En la presente investigación, las tareas propuestas son basadas en textos y su estructura son complementadas de manera secuencial con otras, el propósito pedagógico/didáctico resulta en implementar dichas tareas en un contexto simulado-colaborativo mediante tecnología, y la actividad matemática prevista tiene relación con las oportunidades de aprendizaje analizadas desde la FID.

3. Metodología

3.1. Características de la Investigación

El enfoque de investigación es cualitativo, a fin de caracterizar el trabajo matemático de FP basado en tareas para la enseñanza de la geometría con uso de tecnología, en un contexto de la FID. Precisamente, para determinar cómo los FP realizan el trabajo matemático, el diseño de la investigación se basa en estudio de casos colectivo e instrumental (Stake, 2007). La unidad de análisis corresponde al trabajo matemático desarrollado por los participantes. La justificación de este diseño de casos resulta apropiada para la presente investigación permitiendo caracterizar al trabajo matemático en el contexto descrito.

La aplicación de la propuesta considera dos momentos: el primero vinculado a estudiar el ETM desplegado por los FP, agrupados en parejas organizadas de forma voluntaria, para resolver una secuencia de tareas previamente diseñadas en una sesión con una duración de 2 horas; el segundo, relacionado con aspectos de la enseñanza en el ETM de los FP, la cual consiste en aplicar una entrevista semiestructurada, con una previa coordinación de las parejas de trabajo del momento anterior. Ambas sesiones se realizaron en la universidad a la cual pertenecen los participantes.

3.2. Selección de los Casos

Para los análisis se han seleccionado tres casos que son representativos de otros (Yin, 2018), según su trabajo matemático desplegado. Los participantes corresponden a 10 FP de cuarto año de la carrera Pedagogía en Matemática y Computación de una universidad ubicada en el centro-sur de Chile. Los criterios de inclusión de casos consideran: nivel formativo correspondiente a la etapa final de la carrera; cursos aprobados de geometría y didáctica de la geometría. Esto último, con el propósito de que los FP posean los conocimientos teóricos necesarios para resolver la propuesta y diseñar una mejora colaborativa de la tarea. La participación fue voluntaria previo consentimiento informado y pudiendo desistir en cualquier momento de la recolección de datos, la inexistencia de algún tipo de evaluación o compensación de por medio.

Para efectos del análisis de casos seleccionados en el primer momento se consideran las tipologías de respuestas descritas en Henríquez-Rivas y Kuzniak (2021): (1) *Caso aislado*, alude a un tipo de trabajo poco habitual, en este estudio, asociado con el grupo uno (llamado Gr1); (2) *Caso estándar*, correspondiente al trabajo que reúne características comunes de la mayoría de participantes, relacionado con el grupo dos (llamado Gr2); (3) *Caso bloqueo o dificultad*, referido a la presencia de error(es) o dificultad(es) en el trabajo realizado, relacionado con el grupo tres (llamado Gr3). Cabe señalar que, es el único grupo que presenta errores y bloqueos en el trabajo matemático.

3.3. Recolección y análisis de los datos

Los métodos cualitativos para la recolección de datos contemplan: en el primer momento, la observación participante, notas de campo de los investigadores, las producciones escritas de los participantes y la videograbación de la clase. Para la resolución de las tareas propuestas, los FP formaron parejas para resolverlas mediante un trabajo colaborativo. El segundo momento, con los mismos FP del momento anterior, considera una entrevista semiestructurada, notas de campo de los investigadores, grabaciones de audio y su posterior transcripción.

Para caracterizar el ETM personal de los FP en el primer momento, correspondiente al análisis del trabajo matemático en la implementación de la secuencia de tareas, se considera un protocolo (Tabla 1), basado en categorías teóricas previamente definidas (Henríquez-Rivas et al., 2021). Asimismo, se utilizan elementos de una metodología de análisis basada en los ETM (Kuzniak y Nechache, 2021), que contempla: la identificación del trabajo matemático que los sujetos desarrollan al abordar determinadas tareas; análisis e interpretación de circulaciones o trayectorias de trabajo en términos del ETM y se muestra un esquema que sintetiza estos análisis.

Tabla 1

Protocolo para el análisis del ETM personal.

Categoría	Subcategorías	Descripción
<i>Génesis semiótica</i>	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes (figuras geométricas, signos algebraicos, etc.).
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas.
<i>Génesis instrumental</i>	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material, tecnológico o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
<i>Génesis discursiva</i>	Referencial teórico	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba.
<i>Planos verticales</i>	[Sem-Ins]	Utiliza artefactos en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o en la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	Genera un discurso basado en una experimentación empleando un artefacto, o bien se valida una construcción.
	[Sem-Dis]	Genera un discurso que relaciona el proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento centrado en elementos relevantes.

Nota: Adaptado de Henríquez-Rivas et al. (2021, p. 129).

Para los análisis del segundo momento, que consisten en caracterizar el ETM sobre aspectos de la enseñanza expresados por los FP, mediante un estudio colaborativo que permitió indagar en los alcances y limitaciones de la propuesta de enseñanza, proponer adaptaciones a la secuencia de tareas, bajo la perspectiva de los conocimientos disciplinares y didáctico-disciplinares adquiridos por los participantes en su formación. Para ello, se elaboró un instrumento basado en dos dimensiones, subdimensiones y preguntas asociadas con el ETM de los participantes. Los análisis de los datos fueron procesados con el software cualitativo ATLAS.ti 23, a partir de un análisis de contenido (Bardín, 1996).

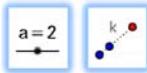
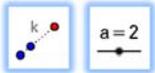
3.4. Presentación de la propuesta

Primer Momento

La secuencia de tareas fue previamente diseñada por los investigadores y contó con apoyo de tecnología (software GeoGebra). La propuesta está diseñada para la enseñanza de los contenidos Homotecia y Teorema de Tales del eje Geometría del currículo escolar chileno, pues favorecen el uso de tecnología y permiten la exploración, así como diversas posibilidades para el diseño de tareas. La organización de la secuencia considera tres tareas y subtareas asociadas a estas, en cada caso (Tabla 2), las cuales se organizan de manera secuenciada. Lo anterior implica que, para abordar una tarea es necesario desarrollar la anterior, por ende, los participantes deben abordar cada subtarea en el orden que se les presenta.

Tabla 2

Tareas propuestas a FP.

Tarea	Subtareas
Tarea 1 (T.1) Crea dos puntos en el plano y traza una recta que los contenga	t.a) Crea un tercer punto sobre la recta que esté a la misma distancia entre los puntos ya definidos. Probar que la distancia entre puntos resulta invariante al desplazamiento.
	t.b) Determina un tercer punto, que esté ahora a un cuarto y luego al doble de la distancia entre los puntos ya definidos. Describe las estrategias o herramientas de GeoGebra utilizadas.
	t.c) Crea un tercer punto respecto a cualquiera de los puntos ya definidos con el uso de las herramientas: <div style="text-align: center;">  </div>
Tarea 2 (T.2) Selecciona el applet “homotecia simulación 3D”	Describe los roles que cumplen los puntos del plano y concluye respecto al valor del deslizador.
	t.d) Mueve el deslizador “a” y describe lo observado.
	t.e) Define el deslizador “a = 5”. ¿Cuál es la relación proporcional existente entre ambas figuras? ¿Es posible estimar el tamaño y posición de la figura homotética solo conociendo la razón?
Tarea 3 (T.3) Crea un triángulo cualquiera en el plano	t.f) Define una homotecia directa con centro en uno de los vértices del triángulo con las herramientas: <div style="text-align: center;">  </div>
	Describe la relación observada entre ambas figuras y concluye sobre las condiciones invariantes existentes.

Fuente: propia de investigación.

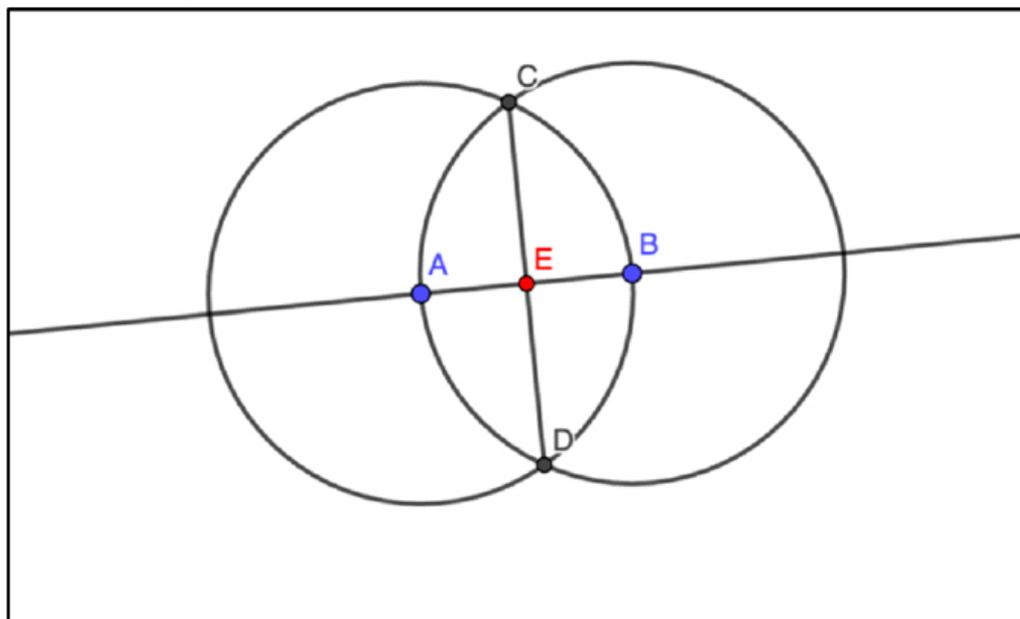
Estrategia de solución prevista

Tarea 1: En t.a y t.b se considera la transformación del enunciado en una construcción en el plano usando el software geométrico y uso de sus herramientas, tales como circunferencias, intersección, semirrecta, etc., para definir un tercer punto sobre la recta que cumplan con las condiciones solicitadas y resulten invariantes al movimiento, lo que conlleva a los FP a considerar nociones como distancia entre puntos, punto medio, razón y proporción. Para

el caso de *t.a*, una posible solución es crear dos circunferencias con centro en cada punto y radio AB, la intersección de estas define el segmento CD y este al interceptarse con AB crean el punto E que resulta ser el punto medio de los puntos A y B (figura 2). En *t.c* se utilizan en conjunto las herramientas deslizador y homotecia para definir el tercer punto, la experimentación con el arrastre permite obtener diferentes casos a analizar para identificar los roles que cumplen cada punto dependiendo de la configuración inicial (punto original, homotético y centro de homotecia). En esta tarea se espera que los participantes puedan asociar el valor del deslizador con el concepto de razón de homotecia.

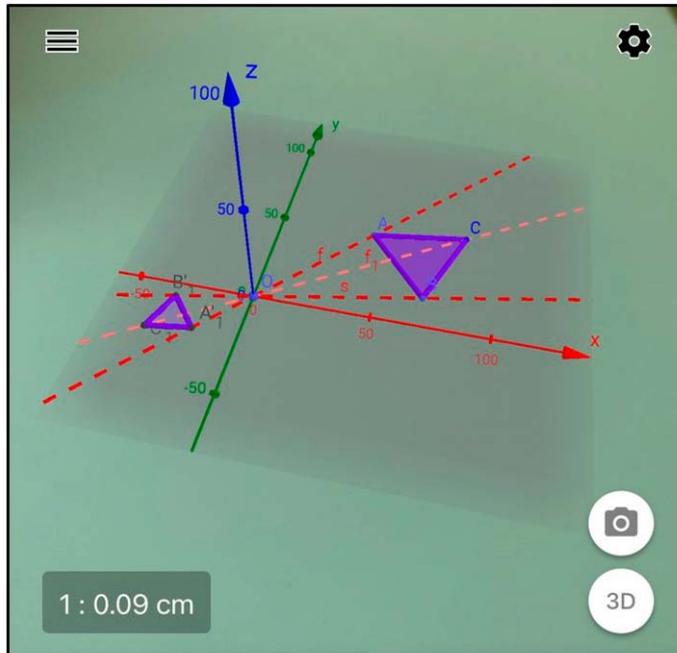
Figura 2

Possible solución para subtarea t.a.



Fuente: propia de investigación.

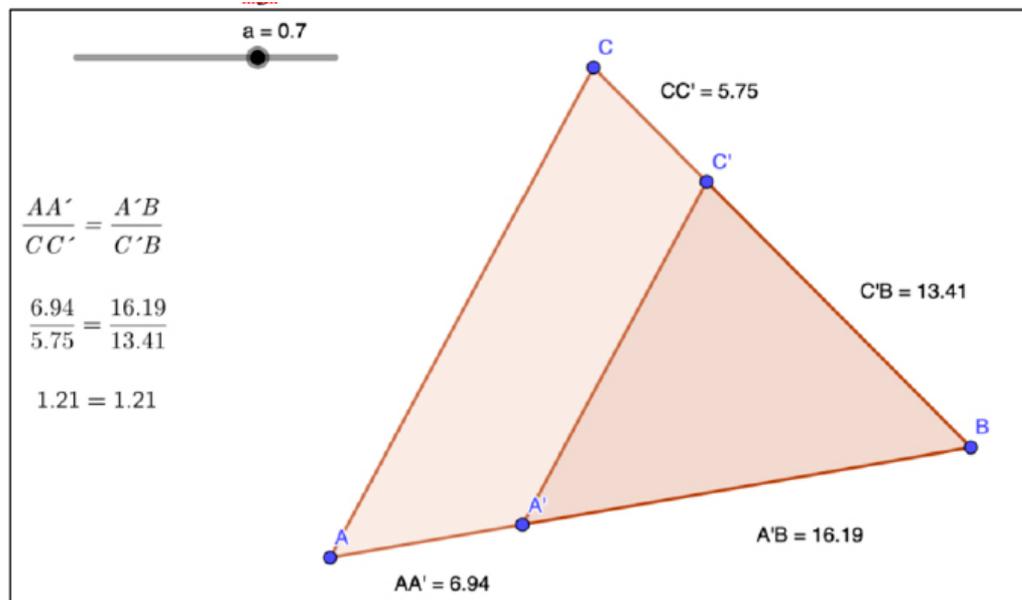
Tarea 2: *t.d* se trata de una tarea exploratoria donde los FP visualizan una proyección de homotecia en realidad aumentada según condiciones predefinidas, basados en la exploración por medio del arrastre. De este modo, se espera que logren identificar cómo uno de los polígonos resulta invariante en su posición, mientras el otro varía tanto en posición como tamaño y la convergencia en un único punto de todas las rectas que unen los vértices correspondientes, lo anterior conlleva a los participantes a realizar conjeturas basadas en propiedades de la homotecia, tales como, semejanza entre figuras, figura original y homotética, homotecia directa e inversa (figura 3). En *t.e*, los FP observan un caso particular de homotecia, en el cual se debe identificar la inexistencia de relación entre el valor del deslizador y la razón. Asimismo, apoyados en artefactos materiales como regla, deben medir los lados o segmentos (centro-vértice) correspondientes para lograr obtener el valor de la razón mediante el cociente. Lo anterior, permite que los participantes generen conjeturas relacionadas a la estimación de tamaños y posición de la imagen dada cierta razón.

Figura 3*Posible solución para subtarea t.d.**Fuente:* propia de investigación.

Tarea 3: En *t.f* se considera la construcción de una homotecia bajo condiciones dadas. Los FP inicialmente construyen un triángulo ABC en el plano del software, luego definen un deslizador con valores mayores a cero y, mediante, la herramienta homotecia se crea el triángulo A'B'C' (figura 4); el arrastre permite que exploren y visualicen diferentes casos. Se espera que los participantes identifiquen el paralelismo que surge entre ciertos segmentos, la igualdad de la razón entre paralelas y de un vértice al centro de homotecia. Finalmente, los FP deben relacionar este caso particular de homotecia con el segundo teorema de Tales y sus propiedades.

Figura 4

Posible solución para subtarea t.f.



Fuente: propia de investigación.

Segundo momento

Referente a los aspectos de la enseñanza asociados con la propuesta y sus posibilidades de ser implementada en el aula, se entrevistó a los participantes (mismas parejas de trabajo del primer momento), en un tiempo previamente establecido, entendido como un procedimiento de campo en un entorno adecuadamente diseñado con preguntas de naturaleza abierta e intención predefinida (Yin, 2018). El protocolo de la entrevista contempla dos dimensiones, planteadas en coherencia con el tipo de ETM estudiado: (1) Preparación de la enseñanza; (2) Aspectos teóricos del ETM. Cada dimensión considera subcategorías, de las cuales se desprenden un total de 12 preguntas formuladas en la entrevista. Un extracto de este protocolo con preguntas se presenta en la siguiente Tabla (3).

Tabla 3

Protocolo para entrevista semiestructurada del ETM idóneo de los FP.

Dimensión	Subcategoría	Preguntas (P)
Preparación de la enseñanza	Planificación	P1: ¿Considera factible implementar la propuesta de enseñanza en el aula?
	Habilidades	P5: ¿Considera adecuadas las tareas propuestas en la actividad para la enseñanza presentada, considerando el desarrollo de las habilidades matemáticas del currículo escolar chileno?
	Artefacto	P8: ¿Considera pertinente el uso de herramientas tecnológicas, o bien prefiere el uso de herramientas tradicionales para la enseñanza del contenido visto?

Fuente: propia de investigación.

4. Resultados

4.1. Primer Momento: ETM Personal de los FP

A continuación, presentamos los resultados por grupo considerando la tipología descrita en la sección de la metodología y la descripción del trabajo matemático sustentado en el ETM. Adicionalmente, se destaca que los participantes representan en sus hojas de respuestas lo creado en el software GeoGebra mediante el uso de herramientas tradicionales (regla y compás).

Caso Aislado: Gr1

Descripción del ETM

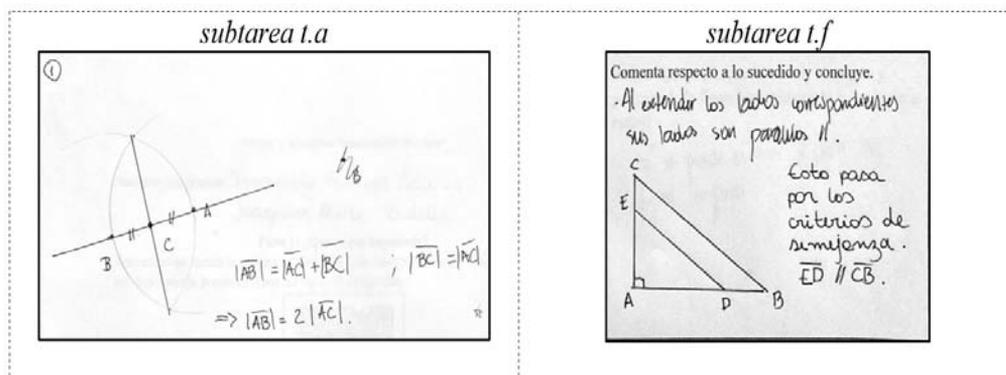
(T.1): En las respuestas desarrolladas por Gr1, se observan en *t.a* una exploración de la relación de distancia respecto a tres puntos colineales y las condiciones, para que resulte invariante al desplazamiento, los participantes realizan la construcción de figuras apoyados de GeoGebra y una construcción figural en la hoja de desarrollo usando regla y compás, asimismo, definen una relación algebraica apoyados de circunferencias y sus intersecciones para mantener la distancia solicitada (figura 5). En *t.b*, se evidencia el uso de la misma estrategia utilizada para la tarea anterior, donde ahora se involucra mediatriz e intersección de circunferencias para definir segmentos proporcionales, además de una representación gráfica y algebraica. En *t.c*, los FP se apoyan de las herramientas *deslizador* y *homotecia* para generar una relación de arrastre que manipulan y concluyen respecto al significado de la razón de homotecia.

(T.2): En las respuestas de *t.d*, los participantes visualizan figuras homotéticas proyectadas, se evidencia como identifican la figura original y homotética, además de especificar que existe una semejanza entre figuras. En *t.e*, apoyados de su regla, miden y anotan diferentes segmentos de la proyección para determinar el valor de la razón al resolver una ecuación de primer grado, se evidencia el uso de la fórmula de razón en diferentes segmentos proporcionales llegando a resultados similares, además, logran conjeturar sobre la estimación del tamaño y posición de imágenes dada cierta razón.

(T.3): En la subtarea *t.f*, al trabajar en la construcción de una homotecia particular en el software, induce a los FP a relacionar el contenido visto con propiedades del segundo teorema de Tales, conjeturan sobre el paralelismo de lados correspondientes y presentan una representación figural en papel (figura 5).

Figura 5

Respuesta de Gr1.



Fuente: propia de investigación.

Análisis teórico del trabajo matemático

En T.1 es posible observar un trabajo semiótico basado en la decodificación e interpretación de signos a partir de la circunferencia y rectas creadas por los participantes (componente representamen). Además, mediante el uso del artefacto tecnológico GeoGebra y, regla y compás (artefacto material), los participantes logran realizar una construcción, lo cual activa la génesis instrumental. Asimismo, estas construcciones se basan en la creación de unidades figurales (Duval, 1995), tales como puntos, rectas y circunferencias, lo cual activa la componente representamen y la visualización que implica el proceso cognitivo de construcción. De este modo, el trabajo anterior se relaciona con la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Adicionalmente, se observa la presencia de la noción de circunferencia y mediatriz de un segmento, al igual que la notación de segmentos y punto medio, lo que activa la componente del plano epistemológico llamada referencial teórica.

En T.2, las subtareas se abordan mediante el artefacto tecnológico GeoGebra y la ecuación de primer grado obtenida. Se observa que las construcciones se realizan mediante dicho artefacto y conducen al cálculo de una respuesta numérica asociado al valor de la razón con diferentes segmentos. Así se favorece la génesis instrumental, pero con un desarrollo del trabajo poco argumentado o justificado. También, se evidencia un trabajo semiótico de visualización, al descifrar e interpretar los signos de la proyección de figuras geométricas (representamen), lo que da cuenta de la activación del plano vertical [Sem-Ins].

En T.3, se evidencia un trabajo semiótico que implica la visualización de objetos compuestos por figuras creadas con el uso del software y, posteriormente, representadas en el papel. Además, mediante el uso del artefacto tecnológico GeoGebra, se observa que se genera una prueba basada en la actividad desarrollada y apoyada en el teorema de Tales, lo cual implica la presencia de la componente referencial teórica. Esto podría dar cuenta de la activación de la génesis discursiva. Lo descrito anteriormente sugiere la activación de los planos verticales [Sem-Ins] y [Sem-Dis]. Cabe señalar que los razonamientos discursivos se plantean de manera debilitada.

A continuación, se muestran esquemas de la activación de planos verticales en el ETM de Gr1 (figuras 6 y 7).

Figura 6

Plano vertical [Sem-Ins] en T.1 y T.2.

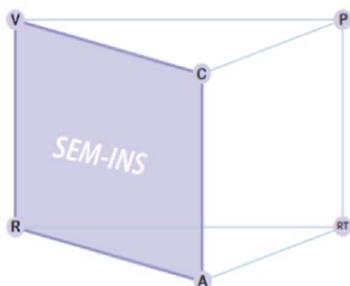
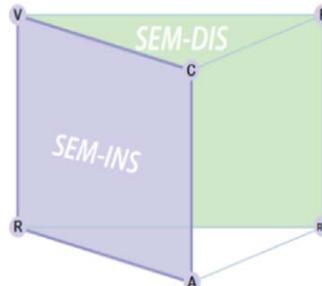


Figura 7

Planos verticales [Sem-Ins] y [Sem-Dis] T3.



Fuente: propia de investigación.

Caso Estándar: Gr2

Descripción del ETM

(T.1): En la respuesta desarrolladas por Gr2, en *t.a* se observa cómo los participantes definen un tercer punto colineal apoyados de la herramienta distancia del software y por medio de tanteo logran cumplir con la proporción solicitada, además, presentan un discurso donde especifican que su estrategia no resulta invariante al movimiento. En *t.b*, crean representaciones figurales del trabajo realizado en GeoGebra y apoyados de diferentes herramientas definen los segmentos proporcionales. Asimismo, presentan un discurso escrito del trabajo realizado (figura 8). En *t.c*, presentan la relación existente entre diferentes valores del deslizador y cómo varían las distancias entre el punto original y homotético respecto al centro de homotecia, además, concluyen respecto a identificar los roles que cumplen cada punto.

(T.2): En la subtarea *t.d*, los FP generan un discurso que alude a la variación del tamaño de la imagen respecto a la figura original mediante el arrastre y crean una representación figural de lo observado. En *t.e*, logran estimar la relación proporcional al medir mediante uso de regla los segmentos correspondientes y calcular el cociente entre ellos. Adicionalmente, concluyen sobre la estimación del tamaño y posición de una imagen dada cierta razón (figura 8).

(T.3): En *t.f*, los participantes concluyen sobre la semejanza obtenida en la construcción de ambos triángulos, además, crean una representación figural de un caso particular trabajado. Sin embargo, no existe evidencia de que este ejemplo en particular lo relacionen de alguna manera con el teorema de Tales.

Figura 8

Respuesta de Gr2.

subtarea t.b	subtarea t.e
<p>¿Qué estrategia o herramientas de Geogebra te ayudó a definir el tercer punto? La herramientas utilizadas corresponden a distancia o longitud, y luego segmento de longitud dada.</p>	<p>Define la relación proporcional existente entre ambas figuras. ¿Se puede estimar el tamaño y posición de la figura homotética solo conociendo la razón? La relación existente entre ambas figuras está dada por: $\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{14} \approx 0.2$ K K puede estimar el tamaño y posición conociendo solo la razón.</p>

Fuente: propia de investigación.

Análisis teórico del trabajo matemático

En T.1 es posible identificar un trabajo semiótico sustentado en la interpretación de signos a partir una recta y segmentos creados. Lo anterior da cuenta de la activación de las componentes visualización y representamen. Asimismo, como artefacto tecnológico se utiliza al software GeoGebra y, a través de diferentes acciones, generan una construcción con resultados como segmentos con distancias establecidas. Además, realizan una construcción en papel utilizando regla (artefacto material), lo cual favorece la presencia de la génesis instrumental. De esta manera, este trabajo implica la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Asimismo, se observa el uso de la noción homotecia y segmentos, lo que da cuenta de la activación de la componente referencial teórica.

La T.2 es desarrollada mediante el artefacto tecnológico GeoGebra y la construcción de figuras en papel mediante regla (artefacto material), obteniendo la razón entre segmentos correspondientes, lo que indica la activación de la génesis instrumental. Asimismo, se observa un trabajo semiótico con estas construcciones que se sustentan en la creación de elementos geométricos, tales como puntos, rectas y triángulos, lo cual activa las componentes representamen y visualización, favorecidas por procesos de construcción. Lo anterior evidencia la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Por otro lado, se aprecia un discurso que alude a la estimación de imágenes dada cierta razón de homotecia, lo que implica la activación de las componentes prueba y referencia teórica y, también, la génesis discursiva. De este modo, se favorece la presencia del plano vertical [Sem-Dis].

La T.3 se aborda mediante el artefacto tecnológico GeoGebra, además, los participantes generan una construcción de figuras creadas tanto en el mismo software, como también, en papel apoyados de regla (artefacto material). Lo anterior evidencia la activación de la génesis instrumental. De igual modo, en las construcciones mencionadas se privilegia la visualización, por figuras dibujadas en el software y, posteriormente, representadas en el papel, activando la génesis semiótica. Lo anterior indica la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Por otro lado, se observa que se menciona la noción semejanza (referencial teórica), pero no logran generar algún tipo de prueba basados en la experimentación.

A continuación, los planos verticales activados en el ETM de Gr2 (figuras 9 y 10).

Figura 9

Activación del plano [Sem-Ins] en T.1 y T.3.

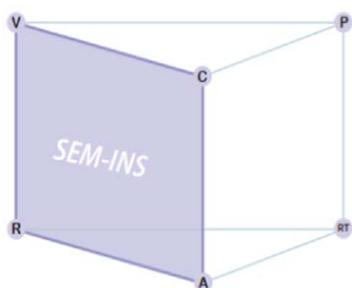
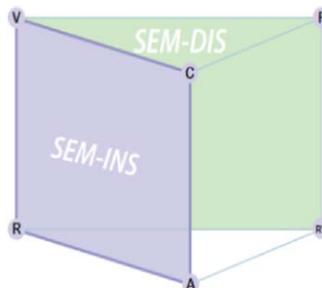


Figura 10

Activación de planos [Sem-Ins] y [Sem-Dis] en T.2.



Fuente: propia de investigación.

Caso Bloqueo o Dificultad: Gr3

Descripción del ETM

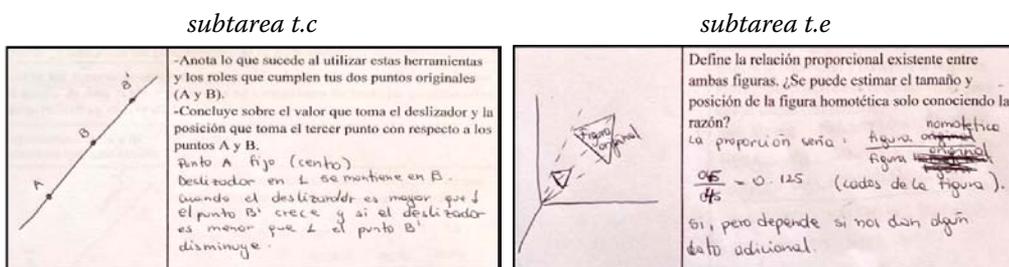
(T.1): En la respuesta desarrollada por Gr3, en *t.a* se evidencia cómo mediante el uso de circunferencia obtienen la relación proporcional solicitada, esto se observa en la representación figural presentada y concluyen respecto a cómo resulta invariante al movimiento. En *t.b*, se observa una respuesta (pseudo) formal, se definen segmentos y mencionan las herramientas utilizadas para obtener las proporciones solicitadas, aunque queda inconclusa la respuesta completa. En *t.c*, se aprecia que los participantes logran utilizar la herramienta homotecia del software y, en base al trabajo realizado, generan un discurso poco argumentado sobre la relación entre el tercer punto y los demás (figura 11). Además, se observa un error de definición al escribir que el punto B' aumenta o disminuye, aludiendo a la variación de distancias.

(T.2): En *t.d*, al visualizar la proyección, los FP generan conclusiones referentes solo al cambio de posición de la figura homotética respecto a la original. En *t.e*, se observa cómo se define una ecuación para obtener la razón solicitada, pero resulta una respuesta errónea y carece de explicación referente a la obtención de los datos. En este caso un posible bloqueo puede estar asociado con un error en la medición de las figuras proyectadas con uso de regla (figura 11).

(T.3): En *t.f*, los participantes presentan poca evidencia del desarrollo de la actividad, donde solo se expone un enunciado posiblemente referente a las condiciones de variabilidad para la inexistencia de la homotecia.

Figura 11

Respuesta de Gr3



Fuente: propia de investigación.

Análisis teórico del trabajo matemático

En T.1, la componente representamen está presente en relación con la circunferencia y la recta creada con el artefacto tecnológico GeoGebra, además, realizan esta construcción en papel con regla y compás (artefactos materiales). Lo anterior da cuenta de la activación de la génesis instrumental. Adicionalmente, se privilegia la visualización y los procesos de construcción, lo que sugiere la activación de las génesis semiótica e instrumental. Esto conlleva la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Por otra parte, se mencionan las nociones punto medio y segmento, del mismo modo que una notación que alude a segmento, activando el referencial teórico.

En T.2 generan construcciones basadas en el artefacto tecnológico GeoGebra, consiguiendo visualizar figuras y obtener resultados de cálculos (aunque erróneos), asociados con la razón. Por consiguiente, se evidencia la activación de la génesis instrumental. De igual modo, estas construcciones se basan en la creación de elementos geométricos sobre el papel,

tales como puntos, rectas y triángulos, lo cual activa la componente representamen y la visualización, activando la génesis semiótica. El trabajo descrito anteriormente da cuenta de la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Adicionalmente, se observan las nociones de punto centro, rotación y vértices, activando la componente referencial teórica.

En T.3, la subtarea que resuelven los participantes es mediante el artefacto GeoGebra. En este caso, se observa la presencia del referencial teórico, dado por los conceptos de rectas paralelas y homotecia, así como el uso de una propiedad descubierta por los participantes y, se produce una prueba al generar un razonamiento discursivo basado en el trabajo realizado con el software y la presencia de la componente referencial teórica. Cabe señalar que, en esta parte de trabajo matemático se evidencia falta de rigurosidad matemática. Asimismo, se privilegian las génesis discursiva e instrumental, lo cual implica favorecer el plano vertical [Ins-Dis]. Asimismo, el trabajo de este grupo evidencia bloqueos y dificultades en el ETM personal.

Por último, se presenta los diferentes planos verticales activados en el ETM de Gr3 (figuras 12 y 13).

Figura 12

Plano vertical [Sem-Ins] en T.1 y T.2.

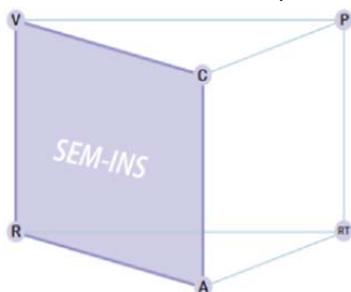
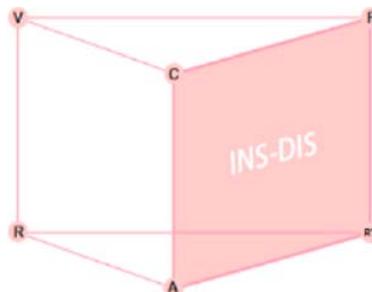


Figura 13

Plano vertical [Ins-Dis] en T.3.



Fuente: propia de investigación.

4.2. Segundo Momento: ETM idóneo de los FP

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a la caracterización del ETM de los FP de matemática, en relación con aspectos de la enseñanza. Para esto, se considera el protocolo descrito en la sección metodológica (Tabla 3). Para presentar los resultados obtenidos en cada una de las dimensiones, se ha considerado un número limitado de ejemplos discursivos, priorizando las dos unidades de significado con mayor frecuencia y la que contempla una menor aparición por dimensión (Tabla 4). A continuación, se muestran los resultados globales de las respuestas de los participantes al responder la entrevista, además, se ilustran las dos subcategorías con mayor frecuencia en cada dimensión, con un ejemplo discursivo de alguno de los casos (grupos) analizados.

Tabla 4*Resultados de entrevistas analizadas en ATLAS.ti 23.*

Dimensión	Subcategorías	Unidad de significado		
		Gr1	Gr2	Gr3
<i>Preparación de la enseñanza</i>	Planificación	5	2	4
	Organización del tiempo	6	3	4
	Habilidades	2	1	1
<i>Aspectos teóricos del ETM</i>	Artefacto	4	1	4
	Referencial teórico	4	0	3
	Representamen	0	0	1

Fuente: propia de investigación.***Dimensión: Preparación de la enseñanza***

Esta dimensión alude a aspectos relacionados con la aplicación de la propuesta de enseñanza por los participantes en términos de su eventual implementación en el aula, abarcando subcategorías relacionadas con la organización de la enseñanza, el currículo escolar chileno y el planteamiento de mejoras. Las respuestas obtenidas se basan en la experiencia de los participantes durante su formación académica y al resolver la propuesta. Las subcategorías que aparecen con mayor unidad de significado son *planificación* y referente a la *organización del tiempo*, esto se puede deber a la perspectiva crítica que los FP han desarrollado a lo largo de su formación pedagógica y la experiencia que poseen al desarrollar, aplicar y mejorar propuestas de clases para diferentes contenidos en cursos de didáctica. Los siguientes extractos evidencian el análisis efectuado:

Planificación: Gr1 «[...] no todos los colegios, dependiendo del nivel de vulnerabilidad de los estudiantes, van a poder acceder a usar un software educativo o tendrán internet»; Gr3 «[...] ver el tema de cuando había que ocupar GeoGebra por los implementos que hay, en cuanto a si están los recursos, para que no entorpezcan la clase».

Organización del tiempo: Gr3 «[...] Yo agrandaría los grupos de trabajo, entre más estudiantes se lograría que fluyan más ideas y las actividades se harían más rápidas»; Gr1 «[...] El papel del docente es fundamental para que actúe como guía del conocimiento, actuar sin darle las respuestas, inducirlos con preguntas como: ¿Qué pasa si muevo esto? ¿Qué pasa con esto de acá?».

Por otro lado, la subcategoría con menor unidad de significado es *habilidades*, a causa de que los FP solo mencionan las habilidades privilegiadas en la propuesta, pero no enfatizan o relacionan aspectos más específicos de estas habilidades con el contenido del currículum escolar chileno. Los siguientes extractos dan cuenta del análisis efectuado:

Habilidades: Gr2 «[...]Yo creo que representar y argumentar y comunicar»; Gr1 «[...]Sí, representación, yo diría que igual argumentar y comunicar podría ser».

Dimensión: Aspectos teóricos del ETM

Esta dimensión se basa en aspectos teóricos específicos del ETM del profesorado (Kuzniak et al., 2022). Las dos subcategorías que poseen una mayor unidad de significado son: *artefacto*, relacionada con la *génesis instrumental*, esto a causa del diseño de la propuesta de aprendizaje, donde los participantes deben utilizar diferentes herramientas de GeoGebra o artefactos materiales (regla y compás) para desarrollar las tareas; *referencial teórico*, en relación con la *génesis discursiva*, esto se puede deber a que los FP al encontrarse en una etapa

final de su carrera disponen de un mayor nivel y conocimiento referente al conocimiento disciplinar matemático. Los siguientes extractos evidencian el análisis efectuado:

Artefacto: Gr1 «[...] Pueden verse distintos casos, porque en el papel es solo un ejemplo y al mover el deslizador, tú tienes varios ejemplos»; Gr3 «[...] Encuentro bien el uso de tecnología en la propuesta, ya que, es algo que es parte de nuestro día a día, además ayuda a mejorar la visualización».

Referencial teórico: Gr1 «[...] Los arquitectos cuando hacen puntos de fuga, se ocupa la homotecia»; Gr2 «[...] Teorema de Tales y Homotecia».

En cambio, la subcategoría *representamen* posee una menor frecuencia en esta dimensión, esto se puede deber a que los participantes no consideran en la argumentación de sus respuestas a los objetos matemáticos específicos utilizados relacionados con signos o símbolos usados durante el primer momento. El siguiente extracto da cuenta de la única respuesta que se enmarca en esta subcategoría:

Representamen: Gr3 «[...] el plano cartesiano era según cada uno también, su opción era dejar el eje o la cuadrícula».

5. Discusión

Los resultados muestran cómo el trabajo matemático de los participantes, al resolver una secuencia de tareas previamente diseñadas, activan las génesis, componentes y planos verticales del ETM de los FP.

En la primera tarea propuesta (T.1), el foco del trabajo está en las génesis semiótica e instrumental. Por ejemplo, T.1 favorece una actividad de exploración y descubrimiento que se basa en el uso de artefactos tecnológico y material, para la construcción de las configuraciones geométricas, más que en una intención discursiva de la actividad realizada (definir segmentos) o lograr generar una prueba. El referencial teórico aparece sin que sea explícito en las subtareas, dado el conocimiento matemático que poseen los FP con cuatro años de formación. También, se constata el trabajo en el dominio geométrico (sin cambios significativos a otros dominios matemáticos, como álgebra o números).

En la segunda tarea (T.2), se evidencia una similitud con T.1 en términos de activación de componentes del ETM. Sin embargo, aquí una diferencia está dada por la aparición del proceso de prueba que desarrollan la mayoría de los grupos; si bien ambas tareas buscan generar una actividad exploratoria basada en el mismo artefacto simbólico y los participantes logran una visualización, descomponiendo las figuras del *representamen* para crear distintas representaciones semióticas. Así, T.2 se diferencia por ser una actividad que busca consolidar los conocimientos ya descubiertos en tareas pasadas y propiciar instancias de activación de la génesis discursiva. No obstante, se destaca una escasa presencia del referencial teórico que presentan los grupos en su desarrollo, lo cual podría deberse a una falta de apropiación que poseen con los aspectos teóricos matemáticos de este contenido.

En la tercera tarea y final (T.3), se observa que es la actividad que menos componentes del ETM logra activar, principalmente se debe por razones de tiempo durante la implementación, en donde la mayoría de las subtareas no se logró aplicar y esto se refleja al observar una evidente diferencia entre los componentes activados por cada grupo. Asimismo, todos los grupos logran activar el referencial teórico, dada la experiencia de las tareas pasadas y lo desarrollado en el artefacto tecnológico. Se destaca de Gr3 activan un plano vertical que había estado ausente, [Ins-Dis]. Sin embargo, este se presenta en un contexto que presenta bloqueos y dificultad en el ETM de los participantes.

Del análisis de las tareas mencionadas en los párrafos anteriores, constatamos que, en el caso de los conceptos asociados al contenido a enseñar (homotecia y teorema de Tales), estos no deberían ser nociones o conceptos desconocidos para los FP, tomando en cuenta los cuatro años de formación académica que poseen. No obstante, se observa que en el desarrollo de sus respuestas del primer momento existe un evidente descenso de aprendizaje en este tipo de contenido geométrico. Por otra parte, gracias a las respuestas obtenidas del segundo momento, los participantes concuerdan en que este tipo de tareas y su análisis desde una perspectiva didáctica logran fomentar el descubrimiento y la argumentación, especialmente si se vinculan con el apoyo de tecnología, lo que permitió explorar de manera dinámica varios casos o ejemplos a la vez, lo que se destaca de este estudio.

Adicionalmente, de resultados obtenidos en el *segundo momento*, se observa que los FP tienen una alta valoración por la *planificación* y la *organización del tiempo* para la enseñanza, dando cuenta de un interés y conocimiento al generar propuestas de mejoras y determinar la viabilidad de implementar actividades de aprendizaje en el aula. Sin embargo, la subcategoría menos aludida resulta ser la referida a las *habilidades matemáticas* presentes en el currículo escolar chileno, esto supone menor consideración al momento planificar u organizar la enseñanza. Lo anterior se sugiere ser tomado en consideración en la formación del profesorado.

En cuanto a la dimensión de aspectos teóricos que caracteriza al ETM de los participantes, se evidencia cómo las componentes *artefacto* y *referencial teórico* resultan ser a las que más aluden los FP durante la entrevista. En este caso, se observa un claro dominio de los participantes al manipular el software GeoGebra y sus diferentes herramientas. Por otra parte, la componente *representamen* está menos presente en los tres grupos, esto sugiere que los FP no logran relacionar los objetos matemáticos utilizados en el primero momento, con sus elementos significantes, lo cual conlleva a una dificultad propia de la enseñanza, al no tener en cuenta las diferentes representaciones del objeto enseñado.

6. Conclusiones

El presente estudio se realizó para investigar el trabajo matemático de FP que resuelven una propuesta de enseñanza con apoyo de tecnología en un contexto simulado y colaborativo, al considerar los resultados, destacamos que la propuesta de enseñanza privilegia la construcción de representaciones figurales, tanto en el software como en el papel, y en algunos casos algebraicas, lo que conlleva a realizar un trabajo exploratorio para generar un discurso, en su mayoría deductivo, con estatus teórico de lo descubierto y sustentado en un referencial. Asimismo, las entrevistas dan cuenta de la percepción que tuvieron los participantes luego de abordar la situación de aprendizaje y relacionarlo con aspectos teóricos y didácticos desarrollados en su formación académica, donde destacan el rol fundamental que tuvo el uso de tecnología en las tareas y lo significativo que resultó para ellos el proceso de descubrir los temas abordados.

Lo anterior indica que se debe revisar y abordar de mejor forma los conceptos disciplinares relacionados con el dominio de la geometría en los FP, pues llama la atención el bajo desempeño obtenido en general al abordar la propuesta de enseñanza. Asimismo, se puede sacar mayor partido al uso del potencial dinámico del software empleado (Arzarello et al., 2002) y el desarrollo de procesos cognitivos como la visualización y la prueba (Balacheff, 1987; Duval, 2016). Del mismo modo, los FP se inclinan por una mayor consideración por desarrollar este tipo de propuestas para la enseñanza, lo que refleja una necesidad en aspectos didácticos y disciplinares mejor planificados dentro de su formación.

Las limitaciones del estudio se vinculan con la recolección de datos provenientes del trabajo matemático de FP en una única universidad pública chilena al participar voluntariamente en una propuesta de enseñanza, por lo cual en futuras investigaciones se podría considerar a participantes de otras instituciones para obtener resultados más representativos a nivel regional o nacional. De igual modo, existen limitaciones asociadas a la factibilidad de implementar la propuesta de enseñanza en cualquier aula, dado el carácter de apoyo tecnológico que poseen las tareas diseñadas y la necesidad de internet. Si este fuera el camino de una futura investigación, consideramos que no posee mayor dificultad adaptar las tareas propuestas a la realidad de las diferentes aulas, de igual modo, el diseño metodológico de esta investigación podría utilizarse para realizar estudios comparativos entre instituciones. Por otra parte, una limitación se vincula al tiempo de implementación de la propuesta y la factibilidad de llevarlo a cabo por un grupo de investigadores más amplio. En este caso, para evitar subjetividades y una implementación eficaz en diversos contextos, se requeriría de un grupo de investigación organizado y que, al momento de analizar los datos, estos consideren procesos de triangulación rigurosos, a fin de no interferir en la interpretación de este tipo de datos cualitativos.

A nuestro entender, este estudio puede aportar al desarrollo de actividades en FID que faciliten mejoras en su desempeño y la reflexión sobre estrategias innovadoras de enseñanza y aprendizaje. Del mismo modo, de los resultados obtenidos planteamos la necesidad en los casos analizados, de generar instancias de reforzamiento sobre contenidos disciplinares matemáticos relacionados con la geometría y referentes al aspecto curricular, esto con la finalidad de potenciar el desarrollo de diseño y planificación de contenidos pertinentes para el aula. Por otra parte, las tareas implementadas nos han permitido comprender cómo los FP con su trabajo matemático involucran diversas formas de visualización y construcción, con o sin apoyo de tecnología, lo que implica una mejor comprensión para el diseño de futuras tareas desde la perspectiva del ETM.

Finalmente, destacamos que la propuesta basada en el uso de artefactos tecnológicos que permiten el arrastre, proporcionado por diferentes softwares de geometría dinámica (como GeoGebra), favorecen variadas interrelaciones entre componentes del ETM y refleja una apropiación del aprendizaje entre los participantes. Lo anterior nos facilitó comprender el trabajo matemático desarrollado, e identificar dificultades y errores. El diseño de propuestas para la FID de este tipo puede ser un aporte al campo disciplinar, a futuras investigaciones y a la formación del profesorado de matemática.

Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID), Proyecto Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 11230523. Además, Marcelo Ibáñez-Carrasco agradece a la Beca Magíster Nacional ANID, Folio 22250730.

Referencias

- Aparicio, C., Sepúlveda, F. (2019). Trabajo colaborativo docente: nuevas perspectivas para el desarrollo docente. *Psicología escolar e educacional*, 23, e187926. <https://doi.org/10.1590/2175-35392019017926>.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM-Mathematics Education*, 34(3), 66-72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>.

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>.
- Ball, L., Barzel, B. (2018). Communication When Learning and Teaching Mathematics with Technology. In: Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, HS., Tabach, M., Vale, C. (eds) *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_12.
- Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.
- Breda, A., Pochulu, M., Sánchez, A., Font, V. (2021). Simulation of Teacher Interventions in a Training Course of Mathematics Teacher Educators. In: *Mathematics 2021*. <https://doi.org/10.3390/math9243228>.
- Bufor, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. Brown, L. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53, 425-443. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333>.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Trad. Myriam Vega). Peter Lang.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de educação matemática*, 30(54), 1-22. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>.
- Hanna, G., Reid, D., y de Villiers, M. (2019). Proof Technology: Implications for Teaching. En Hanna, G., Reid, D., de Villiers, M. (eds) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Mathematics Education in the Digital Era*, 14. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_1.
- Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 1550-1572. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>.
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N., y Espinoza-Vázquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123-142. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210>.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM-Mathematics Education*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>.
- Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces - Theoretical Characteristics. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgado y P. Richard (eds.), *Mathematical work in educational context*, 3-32. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>.
- Kuzniak, A. & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>.
- Lagrange, JB., y Richard, P.R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgado, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, 18. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9.

- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, 17(4-1), 181-197. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1749>.
- Pereira, A. L., y Monteiro, T. S. (2019). Desafíos de la formación inicial docente: un análisis desde las experiencias en el contexto PIBID. *Práxis educativa*, 14(2), 487-506.
- Roanes, E., y Solano, C. (2023). Algunas reflexiones sobre el éxito y el impacto bibliográfico del sistema de geometría dinámica *GeoGebra*. *Math.Comput.Sci.* 17, 11. <https://doi.org/10.1007/s11786-023-00564-9>.
- Rojas, F., Montenegro, H., Goizueta, M., y Martínez, S. (2021). Investigación de modelos por parte de formadores de profesores de matemáticas: cambiar el enfoque hacia las prácticas docentes. En: Goos, M., Beswick, K. (eds) *El aprendizaje y el desarrollo de los formadores de profesores de matemáticas*. Investigación en Educación Matemática. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_19.
- Sanhueza Vega, T., Huencho Ramos, A., Alarcón Chávez, P., Cariaga López, E., Barahona Mura, J., Carrasco Zúñiga, V., & Sanhueza Jara, S. (2023). Competencias desplegadas por futuros profesores de matemática de educación secundaria en el diseño de una Tarea Matemática. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 22(48), 84-104. <https://doi.org/10.21703/0718-5162.v22.n48.2023.005>.
- Sariyasa, S. (2017). Creating a dynamic learning environment to improve student engagement in learning geometry. In *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 012049. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/824/1/012057>.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Watson, A. & Thompson, D. (2015). Design Issues Related to Text-Based Tasks. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education. An ICMI study 22* (143-190). Springer. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2>.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). Sage Editions.



Este trabajo está sujeto a una licencia de Reconocimiento 4.0 Internacional Creative Commons (CC BY 4.0).