

Identificación de la argumentación en el desarrollo de la modelación en la sala de matemáticas

Daniela Henríquez Pizarro^{*a}, Macarena Pinto Toledo^b, Horacio Solar Bezmalinovic^c

Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Educación, Santiago, Chile.

Recibido: 24 de febrero 2020

Aceptado: 06 de mayo 2020

RESUMEN. El objetivo del proyecto es identificar momentos de argumentación en el desarrollo de la modelación en la clase de matemáticas. Para ello, implementamos una tarea matemática de modelación en un curso de 2° medio (15-16 años) en un establecimiento particular subvencionado de Santiago. La clase de 90 minutos fue analizada caracterizando los momentos argumentativos y de modelación para determinar relaciones entre ambas competencias en el aula de matemática. Con ello, se presenta una planificación como propuesta para gestionar esta actividad en una clase de matemática.

PALABRAS CLAVE. Competencias matemáticas; argumentación; modelación.

Identification of argumentation in the development of modeling in the math classroom

ABSTRACT. The objective of the project is to identify moments of argumentation in the development of modeling in math classes. To do this, we implemented a mathematical modeling task in a 2nd year high school course (15-16 years old) in a partially subsidized private establishment in Santiago. The 90-minute class was analyzed by characterizing the argumentative and modeling moments to determine relationships between both competences in math classrooms. With this, a planning is presented as a proposal to manage this activity in a math class.

KEYWORDS. Mathematical competences; argumentation; modeling.

1. INTRODUCCIÓN

El currículum nacional de matemáticas propone, además de Objetivos de Aprendizaje y los contenidos a trabajar en cada nivel escolar, cuatro competencias a desarrollar dentro del aula de matemáticas: representar, argumentar y comunicar, resolver problemas y modelar. Estas “al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los contenidos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo” (Solar y Deulofeu, 2016, p. 1093), es decir, en todas las unidades de la asignatura de matemáticas debería ser posible promover cada una de estas competencias. Además, el aprenderlas “implica el mayor grado de significatividad y funcionalidad posible, ya que para poder ser utilizadas deben tener sentido tanto la propia competencia como sus componentes procedimentales, actitudinales y conceptuales” (Zabala y Arnau, 2007, p.

*Correspondencia: Daniela Henríquez Pizarro. Dirección: Avenida Chiloé 2490, Puente Alto, Santiago, Chile. Correos Electrónicos: dzhenriquez@uc.cl^a, mipinto2@uc.cl^b, hsolar@uc.cl^c.

15), por lo tanto, su aprendizaje es inmensamente importante para un mejor desarrollo del pensamiento matemático. Asimismo, PISA sostiene que las competencias matemáticas “ayudan a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.” (OECD, 2013, p. 9). En el ámbito nacional, la enseñanza de estas competencias ha ido tomando relevancia. Esto se puede ver reflejado en las nuevas Bases Curriculares que propone el Ministerio de Educación en Chile para 3ro y 4to medio (17-18 años), ya que “se espera que los estudiantes trabajen colaborativamente en el modelamiento matemático de situaciones para tomar decisiones fundamentadas, tanto en problemas de la disciplina como de carácter interdisciplinario, del ámbito social, medioambiental o económico” (Ministerio de Educación, 2019, p. 70).

Si bien todas las competencias matemáticas son importantes, consideramos centrales las de *modelación y argumentación*, ya que éstas son las que conectan de mejor manera la teoría matemática con el contexto real. La modelación, por su parte, hace que el estudiante pase del mundo real al modelo matemático y luego de éste al mundo real, lo que conlleva a analizar modelos ya existentes en el contexto cotidiano (Pollack, 1997). De esta manera, el alumno crea un modelo a partir de un fenómeno real, estima resultados, corrige errores y finalmente valida las respuestas encontradas, permitiéndole así una interacción con su entorno. Por otro lado, el objetivo de la argumentación es convencerse a sí mismo y a los demás participantes de la certeza del propio razonamiento, y este razonamiento ocurre de manera interactiva durante los procesos de modelamiento matemático (Tekin, 2018). Además, consideramos que, para lograr desarrollar el proceso de modelación, es fundamental la comunicación del raciocinio que se está haciendo y para que este sea válido se hace necesaria la argumentación. En conclusión, ambas competencias permiten hacer más cercana la matemática y una interacción tanto entre las personas como con el mundo que los rodea.

En esta investigación buscamos identificar de qué forma la modelación fomenta la argumentación en el aula de matemáticas. Para alcanzar este objetivo y basándonos en lo mencionado anteriormente por Pollack, acerca del paso entre el mundo real y matemático al momento de la modelación, es que seleccionamos una tarea matemática que promueve esta competencia en los estudiantes, al pedirles resolver un fenómeno de la vida cotidiana. Luego, implementamos una clase donde los estudiantes se enfrentaron a esta tarea de forma grupal y durante esta experiencia, pusimos especial atención al desarrollo de la competencia de argumentación. Posteriormente, revisando y analizando la evidencia, pudimos encontrar los momentos clave donde surgió tanto la modelación como la argumentación y también donde fue posible hallar cierta relación entre ambas competencias. Como producto, generamos una planificación que puede servir como orientación para docentes que deseen implementar esta tarea matemática en sus propias clases.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Argumentación

Por lo general, los análisis sobre argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), por medio del cual un argumento se puede describir con base en una estructura que se compone de seis elementos: Datos, Conclusiones, Garantía, Respaldo, Calificador modal y Refutadores. Solar y Deulofeu (2016) reducen este modelo a dato, garantía, refutación y conclusión, y afirman que con estos cuatro elementos ya se pueden encontrar momentos de argumentación en el aula de matemática.

Debemos tener claro que la interacción entre alumnos y, entre profesor y alumno, es un elemento básico a la hora de desarrollar la competencia de argumentar y/o comunicar. Sin la existencia de ésta nos estaríamos limitando a una comunicación unidireccional (Brendefur y Frykholm, 2000) que es expositiva y centrada en el docente y por ende limita la posibilidad de desarrollar la argumentación en los estudiantes. Según Jiménez, Suárez y Galindo (2010), una forma de propiciar la interacción en matemáticas es organizar actividades de clase que otorguen al estudiante un papel más activo y protagónico, centradas en el trabajo en grupo y la heurística solucionador-escucha, que tienden a mejorar la capacidad de comunicación. A partir de esto, podemos decir que la elección y organización de la tarea que se desarrollará en clases es una primera acción docente que permite desarrollar la competencia mencionada. Es importante escoger o adaptar tareas matemáticas que inviten a los estudiantes a tomar una postura o a explayarse en la respuesta más allá de monosílabos. Para promover la competencia de argumentación, Solar y Deulofeu (2016) recomiendan elegir tareas que puedan ser resueltas a partir de diferentes procedimientos o estrategias, tengan respuestas abiertas y promuevan posturas diferentes. De la misma manera, estos autores plantean que las estrategias comunicativas y el plan de clases que elabore el o la docente son factores importantes para desarrollar la competencia de argumentación y por ende de comunicación también. Estas estrategias comunicativas debiesen dar oportunidades de participación de los estudiantes, permitir la gestión de los errores y la formulación de preguntas adecuadas. Para esto es necesario un análisis anticipatorio de lo que sucederá en la clase y así tener mayor claridad respecto a las posibles respuestas y errores que podrían tener los estudiantes, además de las acciones docentes que se utilizarán para promover la argumentación.

2.2 Modelación

Entenderemos la modelación matemática como un proceso en el cual los estudiantes consideran y le dan sentido a una situación cotidiana que será analizada usando las matemáticas con el propósito de comprender, explicar o predecir algo (Oropesa, Cortez y Been, 2018). Los resultados a los que llegan los estudiantes son aproximaciones del comportamiento de la situación estudiada, y mientras más precisas sean estas aproximaciones se pueden hacer mejores predicciones y generalizaciones para así llegar a una expresión algebraica o analítica que nos lleve a su utilización en situaciones similares. Asimismo, el Ministerio de Educación (2016) define la modelación como “una habilidad que permite resolver problemas reales mediante la construcción de modelos, que pueden ser físicos, computacionales o simbólicos, y que sirven para poner a prueba el objeto real y ver cómo responde frente a diferentes factores o variantes” (p. 41). Es por esto que, para desarrollar esta competencia, es necesario que el contenido que se esté trabajando se logre plasmar en algún fenómeno de la vida real para luego interpretarlo de manera matemática.

Por su parte Maaß (2006) afirma que para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. Esta autora propone un esquema que describe las etapas propias de la modelación matemática, las cuales nos permitirán analizar la clase donde se promueve el desarrollo de esta competencia. Estas etapas son: simplificar, matematizar, trabajar con matemáticas, interpretar y validar. Simplificar corresponde a la comprensión del problema real y la propuesta de caminos o vías para solucionarlo; la matematización ocurre cuando se pasa del modelo real al modelo matemático, proponiendo una expresión matemática que represente el problema; el trabajo en las matemáticas se desarrolla cuando los estudiantes realizan cálculos a partir del modelo y llegan a una solución matemática; la interpretación ocurre cuando vuelven al mundo real, interpretando la solución matemática como una solución al problema y validar corresponde a evaluar la pertinencia del modelo y/o resultado, discusión del mismo y posible refutación. En la Figura 1 se presenta la relación de estos procesos de modelación.

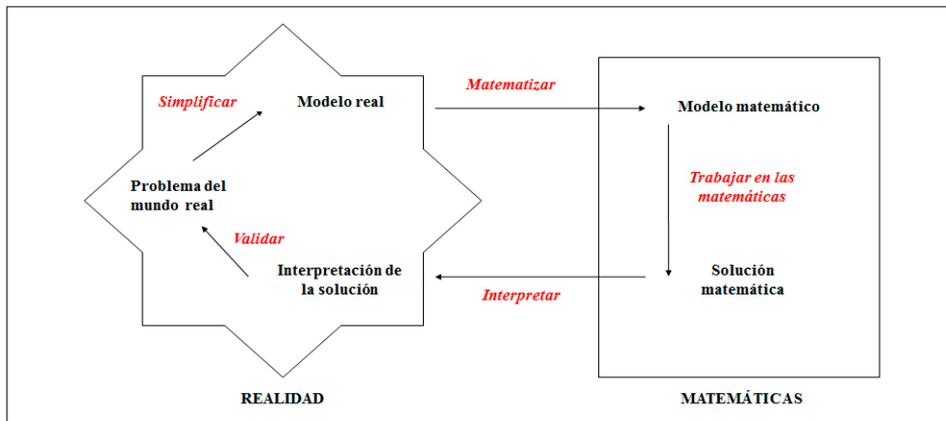


Figura 1. Procesos de modelación (traducción propia, Maaß, 2006, p. 15).

3. MARCO METODOLÓGICO

Para desarrollar esta investigación, implementamos una tarea matemática que promueve principalmente la competencia de modelación y luego hicimos un análisis de carácter cualitativo a partir de lo que ocurrió en el aula de matemáticas, enfocándonos en los niveles de argumentación y etapas de modelación alcanzados por los estudiantes. Como resultado, elaboramos una planificación que sirve como una propuesta para docentes que deseen llevar a cabo esta actividad y busquen orientaciones a partir de nuestra experiencia.

3.1 Contexto y participantes

El estudio se llevó a cabo en un curso de segundo medio (15-16 años) con 39 estudiantes de un establecimiento particular-subvencionado de Santiago, Chile, en una clase que duró 90 minutos. La tarea matemática fue planificada por las investigadoras del estudio e implementada por una de ellas, quien se desempeñó como profesora del curso. Con el fin de promover de mejor manera las competencias de modelación y argumentación, se conformaron grupos de 4 a 5 estudiantes para resolver la tarea. La clase se desarrolló de la siguiente manera: se leyó la tarea y se dieron las instrucciones a todo el curso. Se conformaron siete grupos y cada uno de estos recibió una hoja donde se encontraba escrita la actividad y donde podían realizar anotaciones. Los estudiantes tuvieron tiempo para discutir el problema y se hizo una pequeña pausa en la que la profesora habló delante del curso con el fin de aclarar posibles confusiones del enunciado. Los grupos volvieron a tener tiempo para seguir desarrollando la actividad y se les entregó un papelógrafo y plumón para que plasmaran sus posibles resultados y modelos. Finalmente, cuatro grupos expusieron sus procedimientos y/o resultados al resto del curso y se realizó un cierre retomando las ideas que surgieron y planteando nuevas interrogantes.

3.2 Recopilación de datos

Para realizar esta investigación nos basamos en un problema extraído de Gómez (2007) y diseñamos la siguiente tarea matemática: “En el supermercado ha aparecido un nuevo tipo de toalla de papel y se necesita conocer la cantidad de papel enrollado en este nuevo rollo sin recurrir a desenrollarlo. Puedes manipular el rollo de papel para determinar medidas que consideres adecuadas para desarrollar la actividad. Considera el grosor del papel de 0,07 centímetros. Deja expresadas todas las ideas y procedimientos en esta hoja de papel.”

Cada grupo debía expresar sus ideas y procedimientos en la hoja donde estaba escrita la tarea y además, se les solicitó anotar sus producciones en un papelógrafo para luego presentar al resto de sus compañeros. Junto con estas evidencias escritas, instalamos 3 videocámaras: 1 grabando al grupo curso de forma general y las otras grabando 2 grupos pequeños de estudiantes que fueron escogidos con anterioridad. Además, estos dos grupos pequeños contaban con grabadoras de voz durante toda la clase. Para seleccionar estos grupos pedimos la opinión de la profesora de matemáticas que además es la profesora jefe del curso; ella los recomendó por la diversidad de estudiantes que los conformaban y la iniciativa a participar que poseían algunos de los integrantes.

Escogimos esta tarea matemática porque permite el desarrollo de ambas competencias en cuestión. Por un lado, vemos que la tarea presenta un fenómeno o situación real que puede ser analizado a partir de expresiones matemáticas pasando así por las etapas de modelación de Maaß (2006) y, por lo tanto, promoviendo la competencia de modelación. Por otro lado, la tarea cumple lo recomendado por Solar y Deulofeu (2016) en cuanto a la elección de tareas que promuevan la argumentación. Esto se debe a que la tarea puede ser resuelta mediante múltiples procedimientos a pesar de que tiene una única respuesta. Por ejemplo, los estudiantes podrían calcular el promedio entre el perímetro de la circunferencia externa e interna de la toalla y multiplicarlo por la cantidad de vueltas de esta (ver Figura 2), o también podrían obtener el perímetro de la circunferencia que se forma en cada vuelta que da la toalla y luego sumarlos. Sumado a esto, la tarea matemática permite promover posturas diferentes en los estudiantes, lo cual se puede desarrollar y ampliar a través de una adecuada acción docente que permita contrastar distintos procedimientos. Siguiendo el mismo ejemplo anterior, el o la docente puede seleccionar dos grupos que hayan utilizado cada uno de los dos procedimientos para que los expongan al resto del curso. De esta forma el o la docente puede promover la comparación y refutación entre posturas, con el fin de profundizar en los modelos de cada grupo o identificar diferencias y similitudes entre ambos.

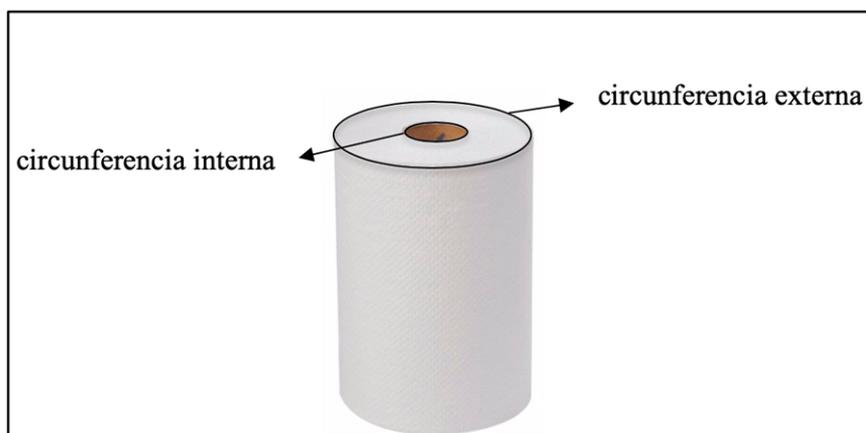


Figura 2. Toalla de papel de cocina.

3.3 Análisis de los datos

Tras la implementación y la recogida de evidencias revisamos el material y categorizamos los momentos de argumentación y modelación de los estudiantes utilizando estrategias de análisis diseñados en el contexto de un proyecto más amplio. En el caso de la argumentación, a partir de la estructura de Toulmin (1958), se diseñó una estrategia para clasificar el tipo de argumentación que se observa en los estudiantes dentro de una clase, posibilitando apreciar el desarrollo de esta

competencia en cinco niveles, donde el nivel 1 es el más bajo y el nivel 5 el más alto (ver Tabla 1). Se puede apreciar que el nivel 2 se asocia a intervenciones de los estudiantes sin garantías, en el nivel 3 observamos presencia de garantías en las intervenciones de los estudiantes, en el nivel 4 aparecen refutaciones por parte de los estudiantes y finalmente, en el nivel 5, los estudiantes fundamentan la discusión.

Tabla 1. Niveles de argumentación en el aula de matemáticas.

| Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3 | Nivel 4 | Nivel 5 |
|--|--|---|--|---|
| Los estudiantes responden con monosílabos o frases breves a las preguntas del docente o de sus compañeros. | Los estudiantes ofrecen respuestas o posiciones de manera breve y sin justificarlas. | Los estudiantes ofrecen y justifican respuestas y posiciones. | Los estudiantes ofrecen, justifican y refutan respuestas y posiciones. | Los estudiantes ofrecen, justifican y refutan respuestas y posiciones. Además, realizan aclaraciones, ampliaciones y reformulaciones para fundamentar sus justificaciones o refutaciones. |

En el caso de la modelación, utilizamos la Tabla 2, que presenta las etapas de modelación de Maaß (2006) junto con indicadores para cada una de estas. Estos indicadores nos permiten identificar la ocurrencia o no de las etapas al descomponer cada una de ellas en aspectos observables en los estudiantes.

Tabla 2. Etapas de modelación.

| Etapas | Indicador |
|------------------------------------|---|
| Simplificar | Discuten el problema para comprenderlo |
| | Consideran acciones y caminos hacia una solución |
| | Utilizan sistemas de representaciones |
| Matematizar | Representan la realidad mediante nociones matemáticas |
| | Proponen una expresión matemática que representa el problema |
| | Formulan el modelo en términos matemáticos |
| Trabajar con matemáticas | Discuten sobre matemáticas |
| | Realizan cálculos y procedimientos para encontrar una solución matemática |
| | Usan modelo para encontrar la solución del problema en términos matemáticos |
| | Explicitan estrategias |
| Interpretar la solución matemática | Comunican un modelo/resultado |
| | Interpretan el modelo y/o sus resultados en términos del problema real |
| Validar | Evalúan el modelo/resultado comprobando pertinencia |
| | Consideran inadecuado el modelo o la solución y recomienzan el ciclo |
| | Discuten modelos y resultados |

Para analizar y categorizar estas competencias revisamos los videos y audios de los dos grupos pequeños seleccionados y las exposiciones de los grupos, y los dividimos en intervalos de a los más 10 minutos. Durante cada intervalo analizamos la presencia de argumentación y modelación, y en el caso de encontrar evidencia, determinamos a qué nivel de argumentación y etapa de modelación correspondía, con las tablas correspondientes. Una vez clasificados los 90 minutos de clase, seleccionamos los episodios donde se alcanzaron los niveles más altos de argumentación para luego revisar en qué etapa de modelación se estaban dando estos momentos y estudiar la posible relación entre ambas competencias. Junto con analizar los niveles de argumentación y etapas de modelación alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de la tarea matemática, analizamos las acciones docentes que promueven tanto la modelación como la argumentación en los estudiantes.

4. RESULTADOS

Comenzamos este apartado exponiendo los niveles de argumentación que se dieron durante la clase de forma general y definimos aquellos grupos que alcanzaron los niveles más altos de esta competencia. Posteriormente, presentamos todas las etapas de modelación que lograron alcanzar los grupos, anteriormente definidos, con el fin de observar el desarrollo de esta competencia cuando se alcanzaron los niveles más altos de argumentación. Finalmente, presentamos dos episodios específicos de cada grupo seleccionado para evidenciar y explicar la asignación de niveles e indicadores que otorgamos.

4.1 Niveles de argumentación

Al analizar los datos notamos que por lo general los estudiantes alcanzaban el nivel 1 o 2 de argumentación. Sin embargo, hubo dos grupos que lograron alcanzar niveles más altos de esta competencia. Por un lado, uno de los dos grupos pequeños alcanzó un nivel 3 durante el tiempo que se dio para trabajar de forma grupal. Es decir, identificamos diálogos entre los estudiantes donde estos expresaban y justificaban sus respuestas y/o posiciones o, dicho en otras palabras, notamos la presencia de garantías en sus interacciones. A este grupo le asignaremos el nombre de “Grupo pequeño” para reconocerlo de aquí en adelante. Por otro lado, en la interacción que se llevó a cabo entre uno de los grupos que expuso y el resto del curso que estaba de público, se alcanzó el nivel 4 de esta competencia. Esto significa que los estudiantes lograron expresar, justificar y refutar sus respuestas y/o posiciones. A este grupo le asignaremos el nombre de “Grupo expositor” para reconocerlo de aquí en adelante.

4.2 Etapas de modelación

Ya habiendo seleccionados los dos grupos que alcanzaron los niveles más altos de argumentación, decidimos elaborar la Tabla 3 para mostrar todos los indicadores de las etapas de modelación que lograron cumplir ambos grupos. Esta tabla nos permite visualizar de forma general el desarrollo de la competencia de modelación, comparar ambos grupos y realizar un breve análisis cualitativo a través de su descripción.

Tabla 3. Etapas de modelación alcanzadas por dos grupos durante la clase.

| Etapa | Indicador | Grupo pequeño | Grupo expositor |
|------------------------------------|---|---------------|-----------------|
| Simplificar | Discuten el problema para comprenderlo | X | |
| | Consideran acciones y caminos hacia una solución | X | |
| | Utilizan sistemas de representaciones | | X |
| Matematizar | Representan la realidad mediante nociones matemáticas | | |
| | Proponen una expresión matemática que representa el problema | X | |
| | Formulan el modelo en términos matemáticos | X | |
| Trabajar con matemáticas | Discuten sobre matemáticas | | X |
| | Realizan cálculos y procedimientos para encontrar una solución matemática | X | |
| | Usan modelo para encontrar la solución del problema en términos matemáticos | | |
| | Explicitan estrategias | X | X |
| Interpretar la solución matemática | Comunican un modelo/resultado | X | X |
| | Interpretan el modelo y/o sus resultados en términos del problema real | X | X |
| Validar | Evalúan el modelo/resultado comprobando pertinencia | X | |
| | Consideran inadecuado el modelo o la solución y recomienzan el ciclo | X | X |
| | Discuten modelos y resultados | | |

Podemos notar que, en el Grupo pequeño, durante el desarrollo de la tarea matemática, se evidenciaron indicadores de todas las etapas de modelación. En cambio, en el Grupo expositor no se evidenciaron indicadores de la etapa de matematizar. Además, podemos notar que en este último grupo no fue necesario evidenciar indicadores de todas las etapas de modelación para seguir con la siguiente, por ejemplo, presentó indicadores de la etapa de simplificar y de trabajar con matemáticas sin haber evidenciado indicadores de la etapa de matematizar. Por otro lado, notamos que la única etapa que presentó todos sus indicadores, tanto en el grupo pequeño como en el expositor, fue el de interpretar la solución matemática. También, destacamos que la presencia de las dos primeras etapas, simplificar y matematizar, se dieron fuertemente en el grupo pequeño mientras que en el caso del grupo expositor se cumple únicamente un indicador de la etapa de simplificar y ninguno de matematizar. Finalmente, es evidente notar que los estudiantes trabajando en grupo pequeño cumplieron más indicadores que los estudiantes que exponían acerca de lo que previamente habían trabajado.

4.3 Momentos significativos de la clase

Para evidenciar y explicar la asignación de niveles de argumentación e indicadores de modelación del grupo pequeño y el grupo expositor presentamos un episodio específico de cada uno de ellos. Estos episodios corresponden a los intervalos de tiempo donde se encuentra inserta la intervención concreta entre estudiantes que nos interesa analizar por su relevancia en cuanto a la competencia de argumentación. Son estos los momentos donde reconocemos la presencia de garantía y refutación, respectivamente, que nos permitieron clasificar estos grupos en los niveles superiores de argumentación. Cada episodio cuenta con una descripción del contexto en el que esta inmerso y la transcripción donde se aprecia el detalle de las interacciones. Es importante mencio-

nar que los nombres de los alumnos en estas transcripciones fueron alterados para resguardar la privacidad de los y las estudiantes. Luego de cada transcripción se explica la asignación de niveles de argumentación y la de indicadores de la competencia de modelación de forma separada.

4.3.1 Episodio 1: Grupo pequeño

El momento en que se dio este episodio fue cuando los estudiantes trabajaban de forma grupal mientras la docente monitoreaba este trabajo haciendo preguntas y orientándolos. Cada grupo debía discutir con el resto de los estudiantes sobre los datos que podían obtener, posibles soluciones y/o respuestas al problema e intentar llegar a un modelo que lo resolviera. Cuando la docente comenzó a interactuar con los y las estudiantes del grupo pequeño, estos estaban solucionando el problema y ya habían encontrado un posible modelo. La estrategia que siguieron fue calcular el volumen total del rollo de papel y además el volumen de una hoja de papel. Dividieron ambos volúmenes para obtener la cantidad total de cuadrados de papel que formaban parte del rollo. Finalmente, multiplicaron este resultado por el largo de un cuadrado y obtuvieron el largo total de la toalla de papel. A modo de clarificar este procedimiento se encuentra la Figura 3, indicando algunos elementos de la toalla de papel que utilizaron para resolver el problema.



Figura 3. Elementos de la toalla de papel.

A continuación, presentamos la transcripción que muestra el momento en que los estudiantes del Grupo pequeño habían llegado a un resultado y la docente comienza a interactuar con ellos.

1 Marco: ¿Cuánto dio?

2 Vicente: 66,725.

3 Javier: Eso, según yo, sería como el total de cuadraditos que hay, ¿o no?... Eso para calcular como el largo de todo habría que multiplicarlo por la medida de cada cuadradito lo cual me daría 1334,5 cm, y si eso lo quiero pasar a metros serían 13,34 m.

4 Docente: ¿Cómo van?

5 Javier: Profe llegamos a algo. Ya mire, lo que hicimos al final fue calcular el volumen de cada hojita. Ocupamos esto (grosor) que sería 0,07 cm.

6 Docente: ¿Y para qué calcularon el volumen de cada hojita?

7 Javier: Es que después tomamos el volumen de esta parte (toalla de papel), después lo dividimos entre el volumen de cada hojita y ahí podríamos establecer cuántas hojitas hay.

8 Docente: ¿Cuántos cuadraditos?

9 Javier: Sí, cuántos cuadraditos tenemos en total. Después eso lo multiplico por 20 cm, que sería el largo de cada uno y ahí tendría el diámetro total ... y ahí llegué.

10 Docente: ¿Y esa es su conclusión final?

11 Fernanda: Te falta algo más.

12 Javier: Sí, porque la verdad es que me dio menos que antes.

13 Vicente: ¿Qué hiciste para sacar el 13?

14 Javier: Esto (1334,5) lo dividí por 100, y después llegué a 13 metros.

15 Vicente: Sí, pero ¿cómo te dio eso?

16 Javier: Esto multiplicado por 20 ... los 20 cm que mide eso (largo de un cuadradito).

17 Vicente: (repite los cálculos de Javier) ¿Será eso? (mostrándole el resultado al resto) Ese es un número muy como... ¿13 metros? Sí, yo creo que sí.

18 Marco: Entonces llegamos a la conclusión de que...

19 Javier: A eso llegamos (señalando el resultado de 13 metros en la guía).

20 Fernanda: Yo creo... ¿Pensai que está bien?

21 Javier: Sí.

Respecto a la competencia de argumentación, durante el episodio se alcanza el nivel 3. La docente, durante su intervención, realiza algunas preguntas que promueven llegar a este nivel. Al inicio del episodio, esta interviene realizando una pregunta (línea 4) con el fin de que los estudiantes comunicaran el procedimiento que estaban usando. Luego interviene por segunda vez con el fin de promover un nivel más alto de argumentación (línea 6). Por consiguiente, los estudiantes justifican su procedimiento comunicando la razón de obtener aquellos cálculos (línea 7), pues necesitarían ocupar esos resultados para llegar a la solución final del problema. Es aquí, donde vemos la presencia de garantía que caracteriza el nivel 3 de argumentación. Podemos notar, entonces, que fueron las preguntas de la docente las que desencadenaron la argumentación por parte de los estudiantes y por las que se alcanzó dicho nivel.

Respecto a la competencia de modelación, al inicio de este episodio los estudiantes se encuentran en la etapa de trabajando con matemáticas porque realizan cálculos y obtienen resultados para llegar a una solución del problema. Posteriormente, interviene la docente (línea 4) y los estudiantes comienzan a explicar el modelo que siguieron, lo cual corresponde a la etapa de interpretar la solución matemática porque comunican su modelo. Luego, la docente les pregunta a los estudiantes (línea 10) si el resultado al que llegaron es la solución al problema. Esto desencadenó una conversación entre los estudiantes sobre los cálculos matemáticos involucrados (líneas 11-16), lo que corresponde a la etapa de trabajar con matemáticas, y la pertinencia del resultado en la situación real al cuestionarse acerca del sentido que tiene el resultado numérico en relación con

el problema real (líneas 17-21), acción correspondiente a la etapa de validar. Queremos destacar que en esta conversación la profesora no intervino para que los propios estudiantes desarrollaran la discusión.

4.3.2 Episodio 2: Grupo expositor

El momento en que se dio este episodio fue cuando la docente eligió algunos grupos para que expusieran sus procedimientos, resultados y/o modelos frente al curso. El grupo expositor seleccionado explicó que habían pensado tres estrategias diferentes para resolver el problema: calcular el volumen, calcular el área y calcular el perímetro. Al comenzar la presentación, mostraron el papelógrafo donde se ven plasmadas las estrategias (ver Figura 4) y explicaron las razones por las cuales decidieron no seguir con las dos primeras y la idea de buscar otra opción para resolver el problema. Luego se centran en la tercera estrategia y describen con mayor detalle el modelo. Este consistía en calcular el perímetro de cada una de las vueltas que da el papel alrededor del cilindro interno que al sumarlas nos daría el largo total de la toalla de papel. El grupo notó que cada vez que el papel comenzaba un nuevo giro aumentaba el radio de la circunferencia debido al grosor que posee la hoja de papel. Durante esta explicación fue cuando dos estudiantes del resto del curso percibieron un error en el procedimiento y se produce una discusión en torno a esto. El error consistía en que el grupo expositor calculó los perímetros de la toalla sumando 0,07 cm a cada perímetro cuando en realidad era el radio el que aumentaba en esa cantidad y, por lo tanto, por la fórmula el perímetro tendría otro tipo de crecimiento.

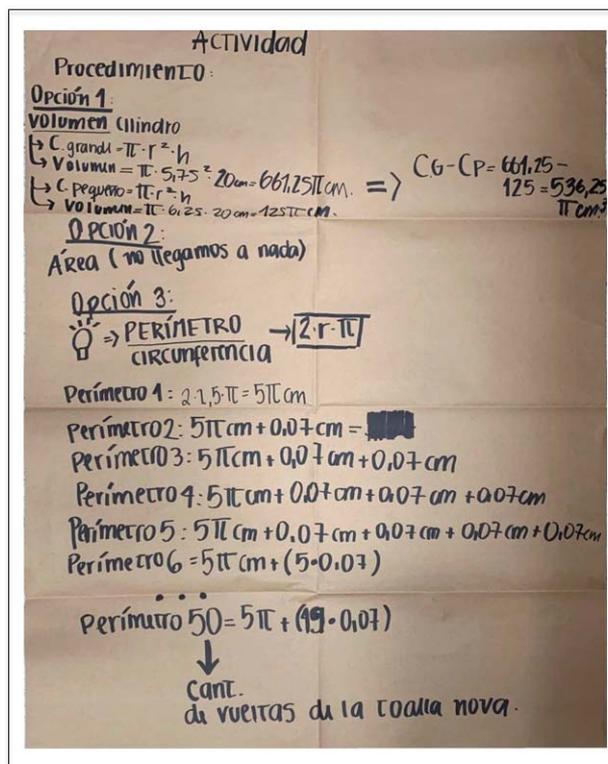


Figura 4. Material de apoyo del Grupo expositor.

A continuación, presentamos la transcripción que muestra el momento en que el Grupo expositor comienza a explicar la opción 3 y se da la discusión.

1 Sofía: Ya, la opción 3 que es la que nos dio y es la correcta, es el perímetro de la circunferencia, ya que sabemos que el perímetro es todo lo que lo rodea o como el contorno y eso es lo que queremos saber. Sacamos el radio, no el diámetro. El radio nos dio 5cm. Ah perdón, el perímetro 1 nos dio 5cm.

2 Camila: Ya, ¿qué pasa? Que nos dimos cuenta que en estas dos opciones (indicando opción 1 y 2) no estábamos ocupando el único dato que nos daban. Entonces nos pusimos a pensar y contamos esto (indicando las vueltas de la toalla de papel) y nos dio 50. Y nos dimos cuenta que si sacamos el perímetro de una de las circunferencias, porque como dijeron antes, este perímetro (el mayor) no es el mismo que este, que está más adentro. Por ejemplo, sacamos el primer perímetro, que es el de la vuelta más chica, le vamos sumando 0,07 cm y nos van a dar todos los perímetros. Cuando tengamos los 50 perímetros y los sumemos nos va a dar el largo de todo esto (indicando la toalla de papel).

3 Pía (del curso): ¿Cuánto es?

4 Sofía: 12,5 aproximadamente 13 metros. Lo dejamos expresado, no lo sumamos porque tampoco π centímetros se puede sumar con centímetros. Tendríamos que desarrollarlo y eso. Ah bueno y eso, como que 2,5 era el radio entonces podemos sacar altiro el perímetro 1 y después el otro y el otro.

5 Curso: (Aplausos).

6 Docente: ¿Alguna pregunta? Por ejemplo, los que habían hecho volumen, ¿qué pueden comentar ahora? ¿Habrían seguido haciendo volumen o les hace sentido tomar el área?

7 Tomás (del curso): ¿Por qué pusieron 2,5 siendo que el radio, la vuelta, se va haciendo más chica cada vez que van acercando?

8 Diana: Eso era lo que no explicaron bien. Era que nosotras calculamos el primer perímetro, que era por ejemplo el de acá (indicando el menor). 0,07 cm era el grosor que mide cada hojita entonces calculamos el perímetro del primero y le sumamos eso y nos iba a dar el segundo ¿se entiende? y a ese segundo perímetro le sumamos el 0,07 y nos da cada vez más grande.

9 Pía (del curso): ¿Pero no cambiaba el radio?

10 Tomás (del curso): Por eso, ¿no cambia el radio?

11 Pía (del curso): Si le sumai 0,07 cm más, tiene que cambiar el radio.

12 Tomás (del curso): Tiene que cambiar el radio.

13 Pía (del curso): No puede ser el mismo.

14 Tomás (del curso): No sería 2,5, sería 2,6 por ejemplo.

15 Docente: (dibujando en la pizarra, ver Figura 5) Digamos que este es el perímetro chico, calcularon este radio.

16 Sofía: Sí, que nos dio 2,5.

17 Docente: Este radio que les dio 2,5 ¿sí? Ya, después tenemos otra circunferencia, ¿cierto? Es muy exagerado, pero imaginemos que este es el siguiente círculo. Y acá hay un grosor, imaginemos que este fuera el grosor.

18 Sofía: Y al sumarle los 0,07.

19 Diana: Ya tenía el perímetro 2.

20 Docente: Entonces, al final el nuevo radio es todo esto, por eso asumo yo que sumaron el 0,07 porque ahora nuestro nuevo radio tiene 0,07 más. ¿Se ve? Háganlo con la fórmula (diciéndole al grupo) ¿Cuánto sería el perímetro de la segunda circunferencia?

21 Sofía: O sea, sería lo que escribimos acá, ¿o no? (indicando papelógrafo).

22 Docente: Con el que está aquí (refiriéndose al dibujado), ¿cuánto sería?

23 Camila: (Escribe la fórmula para obtener el perímetro 2 en la pizarra).

24 Docente: ¿Y eso es lo mismo que tienen ahí en el papelógrafo?

25 Diana: ¿Sí?

26 Camila: No.

27 Docente: Ya entonces, lo que tenían que sumar se lo tenían que sumar al perímetro anterior o...

28 Sofía y Camila: Al radio.

29 Docente: Ya, porque ¿qué es lo que va cambiando? El radio hace que cambie el perímetro, ¿sí?

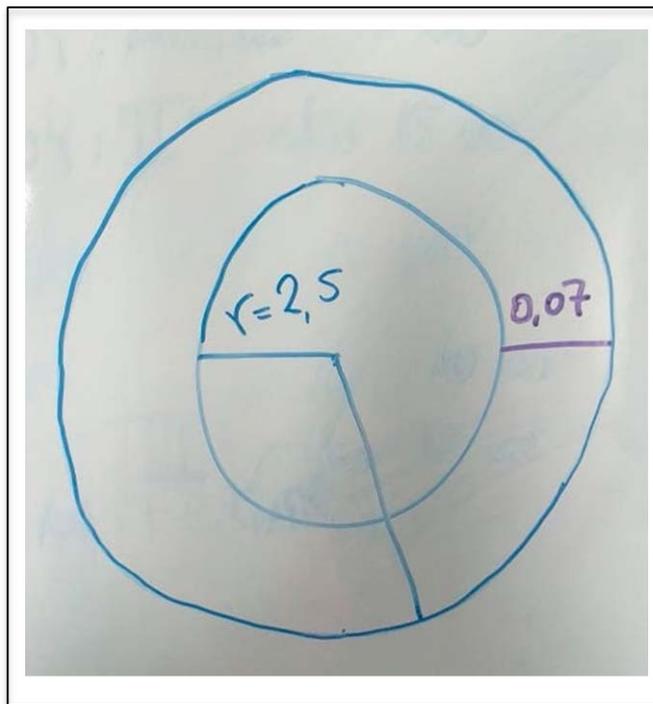


Figura 5. Dibujo de la docente en la pizarra.

Respecto a la competencia de argumentación, en el episodio se alcanza el nivel 4. Tras la explicación del grupo expositor sobre el procedimiento que habían utilizado, hubo alumnos del grupo curso que hicieron preguntas (líneas 7 y 9) sobre una parte específica del cálculo en el modelo expuesto, dado que notaron que había un error en este. Luego de estas preguntas surge la refutación cuando una alumna afirma que el radio debe cambiar (línea 11) al momento de determinar

el nuevo perímetro de la circunferencia. Es este elemento por el cual se alcanza el nivel 4 de argumentación. Es importante destacar que la participación por parte del grupo curso fue promovida a través de preguntas deliberadas que formaron parte de las acciones docente. También subrayamos el hecho de que fueron los propios estudiantes los que notaron un error en el modelo y la docente decidió abordar este error utilizando representaciones gráficas (Figura 5) y evitando validar tanto la postura de algunos estudiantes del curso como del grupo expositor para que fueran los estudiantes lo que corrigieran los procedimientos.

Respecto a la competencia de modelación, el episodio comienza cuando las estudiantes explicitan el modelo de la opción 3, lo que corresponde a la etapa de trabajar con matemáticas. Posteriormente, la docente realiza una pregunta (línea 6) que abre la palabra a comentarios y dudas del resto del curso. En consecuencia, una alumna hace una pregunta (línea 7) acerca de una parte del procedimiento que le pareció errónea, lo cual corresponde a la etapa de validar. Esto a su vez, desencadenó una revisión de la matemática implicada en el modelo por parte del grupo expositor y el resto del curso (líneas 8-14), volviendo así a la etapa de trabajar con matemáticas. En este punto la docente interviene (línea 15) para ayudar a que todos los alumnos comprendan el error identificado, dosificando el procedimiento llevado a cabo. Ella utiliza la pizarra para realizar un dibujo (Figura 5) que representa la situación y les pide a las estudiantes del grupo expositor que realicen los cálculos basándose en lo dibujado. Esto corresponde a la etapa de validar (líneas 17-29), pues todos en conjunto están revisando si los resultados a los que habían llegado anteriormente son correctos.

5. CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue identificar de qué forma la modelación fomenta la argumentación en el aula de matemáticas. Tras este estudio se obtuvieron dos conclusiones: en primer lugar, respecto a las relaciones entre las etapas de modelación y los niveles de argumentación y, en segundo lugar, en relación con las acciones docentes para promover la argumentación en el aula de matemáticas.

Con el fin de relacionar ambas competencias, seleccionamos dos episodios estudiados que presentaban los niveles más altos de argumentación (nivel 3 y 4). Dentro de los cuales, notamos la existencia de tres etapas de modelación: trabajar con matemáticas, interpretar la solución matemática y validar. Luego de analizar los episodios, identificamos que los momentos claves donde se desencadenaron los niveles de argumentación fueron en las etapas de *interpretar la solución matemática* y *validar* (ver Figura 6). Hallamos elementos característicos de cada una de estas etapas que podemos vincular con la competencia de argumentación.

En el caso de la etapa de interpretar la solución matemática, el primer indicador, comunica un modelo/resultado, fue clave para desarrollar la argumentación. Como vimos en el episodio 1, fue fundamental que los estudiantes comunicaran a la profesora y al resto del grupo, el modelo o resultado al que habían llegado porque a partir de esto la docente realizó una pregunta que promovió la justificación del procedimiento escogido. En cuanto a la etapa de validar, fue primordial que los estudiantes se cuestionaran acerca de si era o no correcto el procedimiento utilizado, tal como vimos en el episodio 2. Esto condujo a considerar inadecuado el modelo/resultado, que corresponde al segundo indicador de esta etapa, y fue aquí donde surgió la refutación. Es importante destacar que esta etapa se llevó a cabo principalmente durante las presentaciones, puesto que los grupos debían dar a conocer el trabajo que se había estado haciendo en grupos pequeños, dando la oportunidad de hacer notar posibles errores en resultado y/o modelos ajenos. Ahora bien, a propósito de la relación entre las competencias de modelación y argumentación, consideramos

que, si bien la tarea matemática de modelación no necesariamente promueve la argumentación, pudimos ver en los dos episodios expuestos que las acciones docentes lograron desencadenar esta última competencia. Estas acciones fueron abordar el error y realizar preguntas deliberadas, y por lo tanto coincidimos con Brendefur y Frykholm (2000), en cuanto a que es imprescindible la acción docente y la interacción tanto entre estudiantes como entre el o la docente y sus alumnos. Por un lado, para lograr abordar el error de forma correcta es fundamental realizar una planificación de la clase donde esté presente un análisis anticipatorio. Esto permite prever las posibles respuestas de los estudiantes junto con las acciones que puede realizar el o la docente para gestionarlas. Por otro lado, es necesaria una adecuada acción comunicativa que conlleve a preguntas deliberadas que promuevan la exploración y puesta en común de pensamientos e ideas de los y las estudiantes. En este sentido, siguiendo a Solar y Deulofeu (2016), hemos visto la importancia de que las y los docentes elaboren un plan de clase con las estrategias comunicativas que se llevarán a cabo para desarrollar la competencia de argumentación.

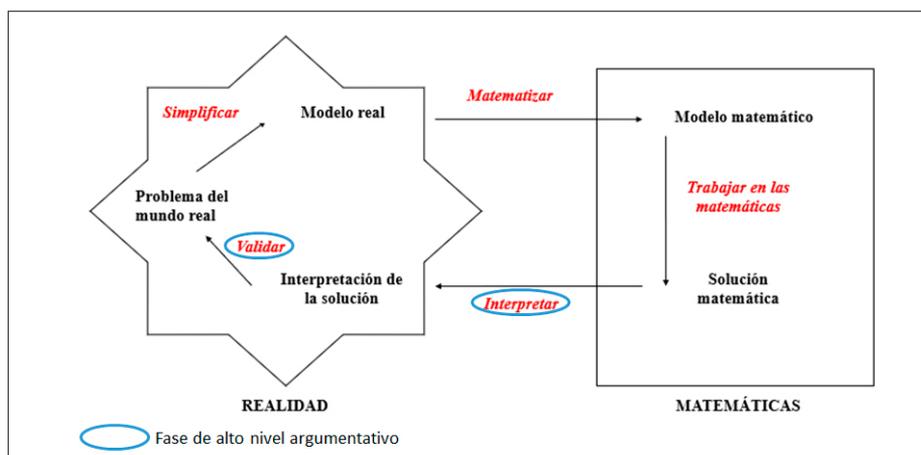


Figura 6. Etapas donde se alcanzaron altos niveles de argumentación.

6. PROPUESTA DIDÁCTICA

Tras la realización de la clase, la revisión de las evidencias recopiladas, el análisis de los episodios y del desarrollo de las competencias de argumentación y modelación, logramos elaborar una planificación que dejamos propuesta para docentes que quisieran desarrollar las competencias en cuestión en sus aulas de matemática. Este instrumento permite orientar a los y las docentes, sugiriendo acciones comunicativas que pueden implementar para lograr una clase que desarrolle las competencias de argumentación y modelación. Es importante destacar que esta planificación fue posible gracias a la experiencia que tuvimos durante la implementación de la tarea matemática con los estudiantes. La anticipación de posibles modelos, la importancia de hacer preguntas que fomenten las competencias en cuestión, las posibles discusiones matemáticas que se pueden presentar, y las posibles evidencias de aprendizaje que pudimos observar en los y las estudiantes, fueron elementos observables durante la experiencia y esenciales a la hora de elaborar este material. La planificación la presentamos en forma de esquema y comienza con la tarea matemática que se le propone a los y las estudiantes. Decidimos articular esta planificación en base a las cinco etapas de modelación de Maaß (2006), donde la etapa de simplificar corresponde al inicio de la clase, las etapas de matemizar, trabajar con matemáticas e interpretar la solución matemática corresponde al desarrollo, y la etapa de validar corresponde al cierre de la clase. En cada momen-

to de la clase, se incluye tanto lo que hace el o la docente como las acciones de los y las estudiantes. Además, asignamos un momento argumentativo en las etapas donde, según nuestra experiencia, vimos que se promueve en mayor medida la argumentación. Es decir, durante las etapas de interpretar la solución matemática y validar, incluimos acciones comunicativas del o la docente y evidencias de argumentación de los y las estudiantes.

Tarea matemática: En el supermercado ha aparecido un nuevo tipo de toalla de papel y se necesita conocer la cantidad de papel enrollado en este nuevo rollo sin recurrir a desenrollarlo. Puedes manipular el rollo de papel para determinar medidas que consideres adecuadas para desarrollar la actividad. Considera el grosor del papel de 0,07 centímetros. Deja expresadas todas las ideas y procedimientos en esta hoja de papel.

Simplificar: Parte inicial de la clase con trabajo individual para que los estudiantes identifiquen datos, variables, consideren caminos a seguir y, si es necesario, utilicen algún sistema de representación.

Matematizar / Trabajar con matemáticas / Interpretar la solución matemática: Desarrollo de la clase y comienza el trabajo en grupo pequeño (4-5 estudiantes) mientras el o la docente monitorea el trabajo. Los estudiantes comparten y contrastan sus ideas para desarrollar un modelo y llegar a la solución del problema. Además, cada grupo recibe un papelógrafo (pliego grande de papel) y plumones para escribir su modelo y/o resultados. Es posible realizar un primer momento argumentativo en la etapa de interpretar la solución matemática.

Acciones comunicativas: ¿Qué procedimiento utilizarán? ¿Todos habían pensado en el mismo procedimiento? ¿Por qué usarán ese procedimiento? ¿Podrían escribir su modelo en términos generales (con letras y expresiones algebraicas en vez de números)? ¿Qué matemática están utilizando? ¿Por qué su estrategia se relaciona con esos conceptos matemáticos? ¿Es esta su respuesta final y por qué?

Evidencias de argumentación: Los estudiantes comunican estrategias, resultados y modelos entre los integrantes del grupo y con el o la docente. Los estudiantes explican la razón de utilizar su procedimiento fundamentando con conceptos matemáticos, por ejemplo, si deciden obtener los perímetros justifican que se debe a que el largo de la toalla al enrollarse corresponde al perímetro de una circunferencia.

Validar: Parte final de la clase y presentaciones de algunos grupos. El o la docente selecciona grupos expositores según los modelos o resultados a los que llegaron. Cada grupo seleccionado explica su modelo/ resultado al resto del curso, utilizando el papelógrafo como material de apoyo. Es posible realizar un segundo momento argumentativo en esta etapa, promoviendo que se contrapongan los procedimientos utilizados.

Acciones comunicativas: ¿Su respuesta tiene sentido en el contexto real y por qué? ¿Consideran correcto el modelo expuesto? ¿Cuál modelo/resultado es más eficiente y por qué? Si tuvieran que obtener el largo de una nueva toalla de papel ¿qué modelo ocuparían? ¿Qué modificaciones le harían a su modelo para que sea más simple/eficaz? ¿Este modelo podría ser ocupado por un alumno de un curso más bajo, por qué?

Evidencias de argumentación: Los estudiantes comunican su modelo al grupo curso. Los estudiantes justifican la selección de su modelo a través de conceptos matemáticos. Los estudiantes dan razones para justificar la pertinencia de su respuesta con el contexto real. Los estudiantes justifican la selección de un modelo más eficaz.

AGRADECIMIENTOS: Investigación financiada por proyecto ANID Fondecyt 1180880.

REFERENCIAS

- Brendefur, J., y Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad*. España: Federación española de profesores de matemáticas.
- Jiménez, A., Suárez, N., y Galindo, N. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1, 173-202.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.
- Ministerio de Educación (2016). *Programa de estudio matemática primero medio*. Chile: Mineduc.
- Ministerio de Educación (2019). *Texto definitivo bases curriculares 3° y 4° medio*. Chile: Mineduc.
- OECD (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Oropesa, C., Cortez, R., y Been, A. (2018). The Emergence of Mathematical Modeling Competencies: Investigation of Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 202-221.
- Pollak, H. (1997). Solving Problems in the Real World. En Steen, L.A. (ed.), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America*. Nueva York. The College Board, 91-105.
- Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de las competencias de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, 30(56), 1092 - 1112.
- Tekin, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 292-314.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Zabala, A., y Arnau, L. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias*. España: Graó.